

CONJECTURE DE SERRE POUR DES
REPRÉSENTATIONS MODÉRÉMENT RAMIFIÉES
DE DIMENSION 3 DU GROUPE DE GALOIS
D'UN CORPS CM
(d'après M. Emerton, T. Gee et F. Herzig)

Diego IZQUIERDO
Mémoire de M2 sous la direction de Florian HERZIG

Décembre 2012

Table des matières

1	Introduction	4
1.1	La conjecture de Serre classique	4
1.2	Idées pour généraliser la conjecture	6
1.3	Notations	9
1.4	Remerciements	9
2	Quelques rappels sur les groupes algébriques	10
2.1	Groupes algébriques	10
2.2	Caractères et cocaractères	11
2.3	Groupes unitaires	12
3	Quelques rappels en théorie des représentations	13
3.1	Quelques tables de caractères	13
3.1.1	Table des caractères de $GL_2(\mathbb{F}_q)$	13
3.1.2	Table des caractères de $GL_3(\mathbb{F}_q)$	15
3.2	Représentations en caractéristique p : poids de Serre locaux	19
3.3	Décompositions de certaines représentations en caractéristique p : théorie de Jantzen	21
3.4	Un isomorphisme fondamental	23
3.5	Correspondance de Langlands locale	24
4	Représentations automorphes	25
4.1	Contexte général et notations	26
4.2	Poids de Serre globaux	27
4.3	L'ensemble des poids associés à une représentation	28
4.4	L'ensemble des poids prévus	30
4.5	Ensemble des poids locaux associés à une représentation	33
5	Quelques rappels de théorie de Hodge p-adique	35
5.1	L'anneau des vecteurs de Witt	36
5.2	L'anneau R	38
5.3	Anneaux (F, G) -réguliers	39
5.4	Représentations de Hodge-Tate	40
5.5	Représentations de de Rham	41
5.6	Représentations cristallines	45
5.7	Représentations semi-stables	47
5.8	Admissibilité des modules filtrés et équivalences de catégories	50
5.9	Caractères	53
5.10	Représentations potentiellement semi-stables	54

5.11	Coefficients dans une extension de \mathbb{Q}_p	55
5.12	Représentations potentiellement semi-stables à coefficients dans des extensions de \mathbb{Q}_p	56
5.13	Théorie de Fontaine-Laffaille	57
5.14	La théorie de Christophe Breuil	59
5.15	Représentations de Weil-Deligne	65
5.16	Théorème fondamental : le type d'inertie (presque) détermine la représentation inertielle	65
6	Relèvements de représentations et opérateurs de Hecke	70
6.1	Actions localement algébriques et formes automorphes	71
6.2	Étape I : en caractéristique 0	73
6.3	Opérateurs de Hecke en caractéristique p	79
6.4	Étape II : Passage en caractéristique p	82
7	Comparaison des ensembles de poids locaux	86
7.1	Les poids locaux associés à une représentation sont souvent des poids prévus	86
7.2	Les poids locaux prévus sont souvent des poids associés à la représentation	89
8	Ensemble des poids de Serre globaux d'une représentation automorphe	99
8.1	Théorème principal : comparaison des ensembles de poids globaux .	100
8.2	Exemples	101
	Références	107

1 Introduction

1.1 La conjecture de Serre classique

Dans la théorie classique des formes modulaires, nous disposons d'une forme cuspidale de poids 12 et niveau 1 :

$$\Delta = (2\pi)^{12} \sum_{n \geq 0} \tau(n) q^n = (2\pi)^{12} q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24} = g_2^3 - 27g_3^2,$$

avec $q = e^{2i\pi z}$, $g_2 = 60 \sum_{(a,b) \neq (0,0)} \frac{1}{(az+b)^4}$ et $g_3 = 140 \sum_{(a,b) \neq (0,0)} \frac{1}{(az+b)^6}$. C'est une fonction propre des opérateurs de Hecke, et sa fonction L est donnée par :

$$L(\Delta, s) = (2\pi)^{12} \sum_{n \geq 1} \tau(n) n^{-s} = (2\pi)^{12} \prod_l L_l(\Delta, s),$$

où l décrit l'ensemble des nombres premiers et les facteurs locaux sont donnés par $L_l(\Delta, s) = 1 - \tau(l)l^{-s} + l^{11-2s}$. En 1969, dans l'article [Del69], Pierre Deligne construit pour chaque premier p une représentation $\rho : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ telle que, pour tout premier $l \neq p$, ρ est non ramifiée en l et $\rho(\text{Frob}_l)$ (qui est bien défini à conjugaison près) a pour polynôme caractéristique $\chi_l(X) = X^2 - \tau(l)X + l^{11}$. On remarque alors que $L_l(\Delta, s) = l^{-2s} \chi_l(l^s)$ et il est donc possible de retrouver les facteurs locaux de la fonction L en tous les premiers distincts de p à partir de ρ . Deligne a ensuite généralisé cet exemple, en établissant le résultat suivant qui permet d'associer à chaque forme cuspidale fonction propre des opérateurs de Hecke une représentation semi-simple de $G_{\mathbb{Q}}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ de dimension 2 :

Théorème 1.1.1. (Théorème de Deligne)

Soit p un nombre premier et N un entier naturel. Fixons un idéal maximal de $\overline{\mathbb{Z}}$ au-dessus de p , ce qui fournit un morphisme $\varphi : \overline{\mathbb{Z}} \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$. Soit $f = \sum a_n q^n$ une forme cuspidale sur $\Gamma_1(N)$ de poids k . On suppose que f est une forme propre normalisée des opérateurs de Hecke. On note $\epsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ le caractère associé à f : pour chaque entier d , $\epsilon(\bar{d})$ est défini par $(cz + d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \epsilon(\bar{d})f(z)$ pour a, b, c entiers tels que $ad - bc = 1$. Il existe alors une représentation continue semisimple $\rho_f : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$, unique à isomorphisme près, telle que :

- (i) ρ_f est non ramifiée en dehors de pN ,
- (ii) pour l premier ne divisant pas pN , $\text{Tr}(\rho_f(\text{Frob}_l)) = a_l$ et $\det(\rho_f(\text{Frob}_l)) = \epsilon(l)l^{k-1}$,

où a_l et $\epsilon(l)$ sont vus dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ à l'aide de φ .

Remarque 1.1.2. La représentation du théorème précédent vérifie alors que $\det(\rho_f(\sigma)) = \epsilon(\chi(\sigma))\chi(\sigma)^{k-1}$ pour tout $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$. En effet, posons $\psi(\sigma) = \frac{\epsilon(\chi(\sigma))\chi(\sigma)^{k-1}}{\rho_f(\sigma)}$. D'après le théorème, $\psi(\text{Frob}_l) = 1$ si $l \nmid Np$. Comme ψ est un caractère continu, il

existe une extension finie K de \mathbb{Q} telle que ψ se factorise par $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Prenons $\sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$. D'après le théorème de Cébotarev, il existe $l \nmid Np$ premier tel que $\sigma = \text{Frob}_l$. On en déduit que $\psi(\sigma) = 1$.

Nous avons ainsi associé des représentations galoisiennes en caractéristique p à des formes modulaires. Il est alors naturel de se demander quelles représentations galoisiennes peuvent être obtenues par ce procédé. C'est l'objet de la version faible de la conjecture de Serre :

Théorème 1.1.3. (Conjecture de Serre - version faible)

Soit ρ une représentation continue, irréductible et impaire (c'est à dire $\det(\rho(c)) = -1$, où c est la conjugaison complexe). Alors ρ est modulaire, c'est-à-dire il existe une forme cuspidale normalisée f forme propre des opérateurs de Hecke telle que $\rho \cong \rho_f$.

C'est en 1987 que Jean-Pierre Serre publie l'article [Ser87] dans lequel il précise cette conjecture en proposant une méthode pour déterminer le niveau et le poids d'une forme modulaire induisant la représentation ρ . Il définit ainsi $N(\rho)$ le conducteur d'Artin de la représentation ρ . Plus précisément, fixons $l \neq p$ un nombre premier et après avoir choisi une extension à $\overline{\mathbb{Q}}$ de la valuation l -adique, considérons la suite des groupes de ramification $G_{\mathbb{Q}} \supseteq G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots$. On pose alors $n(l, \rho) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\dim(V/V^{G_i})}{[G_0:G_i]}$, et on définit le conducteur d'Artin par : $N(\rho) = \prod_{l \neq p \text{ premier}} l^{n(l, \rho)}$. C'est le niveau associé à ρ .

Serre introduit aussi un poids $k(\rho)$ associé à la représentation ρ . La définition de ce poids est nettement plus compliquée que celle du niveau. En fait, $k(\rho)$ ne dépend que de la restriction de ρ au sous-groupe d'inertie $I_p = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{nr})$. Plus précisément, nous devons distinguer plusieurs cas :

- (A) $\rho|_{I_p} \cong \begin{pmatrix} \omega_1^a & \\ & \omega_1^b \end{pmatrix}$, pour $p-2 \geq a \geq b \geq 0$;
- (B) $\rho|_{I_p} \cong \begin{pmatrix} \omega_1^a & * \\ & \omega_1^b \end{pmatrix}$, pour $1 \leq a \leq p-1, 0 \leq b \leq p-2$ et $a \neq b+1$ et $\rho|_{I_p}$ n'est pas somme directe de deux caractères ;
- (C) $\rho|_{I_p} \cong \begin{pmatrix} \omega_1^a & * \\ & \omega_1^{a-1} \end{pmatrix}$, pour $1 \leq a \leq p-1$ et $\rho|_{I_p}$ n'est pas semi-simple et est peu ramifiée ;
- (D) $\rho|_{I_p} \cong \begin{pmatrix} \omega_1^a & * \\ & \omega_1^{a-1} \end{pmatrix}$, pour $1 \leq a \leq p-1$ et $\rho|_{I_p}$ n'est pas semi-simple et est très ramifiée ;
- (E) $\rho|_{I_p} \cong \begin{pmatrix} \omega_2^{c_1+pc_2} & \\ & \omega_2^{c_2+pc_1} \end{pmatrix}$, pour $p-1 \geq c_1 > c_2 \geq 0$;

où ω_1, ω_2 désignent les caractères fondamentaux de niveaux 1 et 2 respectivement. Nous définissons alors $k(\rho)$ selon le cas où l'on est :

- (A) $k(\rho) = a + pb + 1$.
- (B) $k(\rho) = \max(a, b) + p \min(a, b) + 1$.
- (C) $k(\rho) = a + p(a - 1) + 1$.
- (D) $k(\rho) = a + p(a - 1) + p$.
- (E) $k(\rho) = c_1 + pc_2 + 1$.

La conjecture forte de Serre s'écrit alors :

Théorème 1.1.4. (Conjecture de Serre - version forte)

Soit ρ une représentation continue, irréductible et impaire. Alors ρ provient d'une forme cuspidale normalisée f forme propre des opérateurs de Hecke de poids $k(\rho)$ et de niveau $N(\rho)$.

La conjecture de Serre a été prouvée en 2009 par Chandrashekar Khare et Jean-Pierre Wintenberger. Les conséquences de la conjecture sont spectaculaires. En particulier, le dernier théorème de Fermat en découle. Nous rappelons ici brièvement l'idée.

Supposons qu'il existe des entiers a, b, c et un nombre premier $p \geq 5$ tels que $a^p + b^p + c^p = 0$ avec $abc \neq 0$. On peut supposer que a, b, c sont premiers entre eux, que b est pair et que $a \equiv 3 \pmod{4}$. On considère alors la courbe elliptique définie par :

$$y^2 = x(x - a^p)(x + b^p). \quad (E)$$

La p -torsion de la courbe elliptique $E[p]$ fournit alors une représentation $\rho_E : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_2(\mathbb{F}_p)$ continue, irréductible et impaire. De plus, on peut prouver que $k(\rho_E) = 2$ et que $N(\rho_E) = 2$. Par conséquent, d'après la conjecture de Serre, ρ_E provient d'une forme cuspidale normalisée (non nulle) de poids 2 et de niveau 2. Mais de telles formes modulaires n'existent pas, ce qui prouve que l'équation $a^p + b^p + c^p = 0$ n'a pas de solutions avec a, b, c entiers non nuls et p premier supérieur ou égal à 5. Dans ce mémoire, nous n'allons pas nous intéresser à des représentations de dimension 2, mais à des représentations de dimension 3. Nous allons étendre la notion de représentation modulaire aux représentations de dimension 3, pour ensuite étudier le problème du poids : si une représentation galoisienne est modulaire, pour quels poids est-elle modulaire ? On ne s'intéresse donc ni au problème de la modularité (déterminer si une représentation galoisienne est modulaire) ni au problème du niveau (déterminer en quels niveaux une représentation modulaire est modulaire). Nous suivons de près l'article [EGH] de Matthew Emerton, Toby Gee et Florian Herzig.

1.2 Idées pour généraliser la conjecture

La conjecture de Serre que nous avons décrite concerne des représentations de $G_{\mathbb{Q}}$ de dimension 2. Nous voudrions la généraliser en dimension supérieure. Cependant,

la notion de modularité d'une représentation que nous avons adoptée n'est pas transposable, du moins pas sans un travail préalable.

Considérons le \mathbb{Q}_p -espace vectoriel $V = \text{Sym}^{k-2}(\mathbb{Q}_p^2)$. Le groupe $\Gamma_1(N)$ agit sur V linéairement et stabilise le réseau $V_0 = \text{Sym}^{k-2}(\mathbb{Z}_p^2)$. On a alors une suite exacte :

$$0 \rightarrow V_0 \rightarrow V \rightarrow V/V_0 \rightarrow 0.$$

La suite exacte de cohomologie non abélienne s'écrit donc :

$$(V/V_0)^{\Gamma_1(N)} \rightarrow H^1(\Gamma_1(N), V_0) \rightarrow H^1(\Gamma_1(N), V) \rightarrow H^1(\Gamma_1(N), V/V_0).$$

Notons $H^1(\Gamma_1(N), V_0)_{\text{ssstor}}$ le quotient de $H^1(\Gamma_1(N), V_0)$ par son sous-module de torsion. Comme $(V/V_0)^{\Gamma_1(N)}$ et $H^1(\Gamma_1(N), V/V_0)$ sont de torsion, et comme il est possible de prouver que $H^1(\Gamma_1(N), V_0)$ est un \mathbb{Z}_p -module de type fini et que $H^1(\Gamma_1(N), V)$ est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie, nous déduisons que $H^1(\Gamma_1(N), V_0)_{\text{ssstor}} \hookrightarrow H^1(\Gamma_1(N), V)$ est un réseau. D'autre part, nous disposons de la suite exacte induite par la multiplication par p dans V_0 :

$$0 \rightarrow V_0 \rightarrow V_0 \rightarrow V_0/pV_0 \rightarrow 0.$$

La suite exacte de cohomologie impose alors que

$$H^1(\Gamma_1(N), V_0)/pH^1(\Gamma_1(N), V_0) \hookrightarrow H^1(\Gamma_1(N), V_0/pV_0).$$

Par conséquent,

$$H^1(\Gamma_1(N), V_0/pV_0) \hookrightarrow H^1(\Gamma_1(N), V_0) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p \twoheadrightarrow H^1(\Gamma_1(N), V_0)_{\text{ssstor}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p,$$

et :

$$H^1(\Gamma_1(N), V_0/pV_0) \otimes_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}_p} \hookrightarrow H^1(\Gamma_1(N), V_0) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{F}_p} \twoheadrightarrow H^1(\Gamma_1(N), V_0)_{\text{ssstor}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{F}_p}.$$

Soit maintenant $f = \sum a_k q^k$ une forme propre normalisée des opérateurs de Hecke, de niveau N premier avec p . Notons $\mathbb{T} = \mathbb{Z}[T_l, S_l : l \nmid pN]$ l'algèbre de Hecke et soit \mathfrak{m} le noyau du caractère $\mathbb{T} \rightarrow \overline{\mathbb{F}_p}$ correspondant aux valeurs propres de f . L'isomorphisme d'Eichler-Shimura :

$$H^1(\Gamma_1(N), \text{Sym}^{k-2}(\overline{\mathbb{Q}_p^2})) \cong \mathcal{M}_k(\mathbb{C}) \oplus \overline{\mathcal{S}_k(\mathbb{C})}$$

est compatible avec l'action de l'algèbre de Hecke, et donc il existe un élément non nul de $H^1(\Gamma_1(N), V \otimes \overline{\mathbb{Q}_p}) \cong H^1(\Gamma_1(N), V) \otimes \overline{\mathbb{Q}_p}$ vecteur propre des opérateurs de Hecke ayant les mêmes valeurs propres que f . Comme $H^1(\Gamma_1(N), V_0)_{\text{ssstor}} \otimes \overline{\mathbb{Z}_p}$ est un réseau de $H^1(\Gamma_1(N), V) \otimes \overline{\mathbb{Q}_p}$, il existe aussi un élément non nul de $H^1(\Gamma_1(N), V_0) \otimes \overline{\mathbb{Z}_p}$ vecteur propre des opérateurs de Hecke ayant les mêmes valeurs propres que f .

Cela impose l'existence d'un élément non nul de $H^1(\Gamma_1(N), V_0) \otimes \overline{\mathbb{F}_p}$ vecteur propre des opérateurs de Hecke dont les valeurs propres sont les réductions de celles de f . Donc $(H^1(\Gamma_1(N), V_0) \otimes \overline{\mathbb{F}_p})_{\mathfrak{m}} \neq 0$. La localisation étant un foncteur exact, on a :

$$(H^1(\Gamma_1(N), V_0/pV_0) \otimes_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}_p})_{\mathfrak{m}} \hookrightarrow (H^1(\Gamma_1(N), V_0) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{F}_p})_{\mathfrak{m}} \twoheadrightarrow (H^1(\Gamma_1(N), V_0)_{\text{stator}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{F}_p})_{\mathfrak{m}} \neq 0,$$

d'où $(H^1(\Gamma_1(N), \text{Sym}^{k-2}(\overline{\mathbb{F}_p}^2)))_{\mathfrak{m}} \cong (H^1(\Gamma_1(N), V_0/pV_0) \otimes_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}_p})_{\mathfrak{m}} \neq 0$.

Maintenant, on voit que $\text{Sym}^{k-2}(\overline{\mathbb{F}_p}^2)$ est un $GL_2(\mathbb{F}_p)$ -module. Considérons une filtration maximale de $GL_2(\mathbb{F}_p)$ -sous-modules : $0 = V^{(0)} \subsetneq V^{(1)} \subsetneq \dots \subsetneq V^{(r)} = \text{Sym}^{k-2}(\overline{\mathbb{F}_p}^2)$. Comme les suites

$$H^1(\Gamma_1(N), V^{(i)})_{\mathfrak{m}} \rightarrow H^1(\Gamma_1(N), V^{(i+1)})_{\mathfrak{m}} \rightarrow H^1(\Gamma_1(N), V^{(i+1)}/V^{(i)})_{\mathfrak{m}}$$

sont exactes, il existe i tel que $H^1(\Gamma_1(N), V^{(i+1)}/V^{(i)})_{\mathfrak{m}} \neq 0$.

Par conséquent, nous avons prouvé qu'il existe une représentation irréductible F de $GL_2(\mathbb{F}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ telle que $H^1(\Gamma_1(N), F)_{\mathfrak{m}} \neq 0$.

Cela nous permet de généraliser les définitions de poids de Serre et de modularité. Pour $l \nmid pN$, notons $a_l = \text{Tr}(\rho(\text{Frob}_l))$, et $b_l = l^{-1} \det(\rho(\text{Frob}_l))$ et considérons le morphisme $\mathbb{T} \rightarrow \overline{\mathbb{F}_p}$ qui à T_l associe a_l et qui à S_l associe b_l . Notons aussi \mathfrak{m} le noyau de ce morphisme : c'est un idéal maximal de l'algèbre de Hecke. Nous pouvons alors associer à ρ certains poids de Serre de la manière suivante :

Définition 1.2.1. (Poids de Serre et modularité)

- (i) On appelle **poids de Serre** toute représentation irréductible de $GL_2(\mathbb{F}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$.
- (ii) On appelle $W(\rho)$ l'ensemble de poids de Serre V tels que $H^1(\Gamma_1(N), V)_{\mathfrak{m}} \neq 0$.
- (iii) Si V est un poids de Serre, on dit que ρ est **modulaire** de poids V si $V \in W(\rho)$.

Pour mettre en évidence le lien entre $k(\rho)$ et $W(\rho)$, il convient d'abord de classifier les poids de Serre :

Théorème 1.2.2. (Inventaire des poids de Serre)

Il y a exactement $p(p-1)$ poids de Serre distincts (à isomorphisme près), qui sont donnés par $F(a, b) = \text{Sym}^{a-b}(\overline{\mathbb{F}_p}^2) \otimes \det^a$ avec $0 \leq a - b \leq p - 1$ et $0 \leq b < p - 1$.

On dispose alors d'un dictionnaire entre $k(\rho)$ et $W(\rho)$:

$$k(\rho) = \min\{k > 1 \mid JH(\text{Sym}^{k-2}(\overline{\mathbb{F}_p}^2)) \cap W(\rho) \neq \emptyset\}$$

$$W(\rho) = \{F(a, b) \mid 0 \leq a, b, \leq p - 1, a - b - k(\rho \otimes \omega_1^{-b}) \in \{2, p + 1\}\}.$$

Par conséquent, l'approche par les formes modulaires classiques et cette deuxième approche où l'espace des formes modulaires est $H^1(\Gamma_1(N), F)$ sont équivalentes. La deuxième approche est alors généralisable pour des représentations de dimension supérieure.

1.3 Notations

Nous donnons ici une liste de notations que nous utiliserons dans la suite sans rappeler ce qu'elles désignent :

- Dans tout le mémoire, p désigne un nombre premier fixé.
- Pour un corps K quelconque, G_K désigne toujours le groupe de Galois absolu de K .
- Dans tout le mémoire, on suppose avoir fixé une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_p}$ de \mathbb{Q}_p , ainsi qu'un isomorphisme $\Upsilon : \overline{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbb{C}$. On note $\overline{\mathbb{Z}_p}$ l'anneau des entiers de $\overline{\mathbb{Q}_p}$. On note aussi I_p ou $I_{\mathbb{Q}_p}$ le sous-groupe d'inertie de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et I_t le sous-groupe de ramification sauvage.
- On dit qu'un corps K est p -adique si c'est un corps de caractéristique 0 complet pour une valuation discrète à corps résiduel parfait de caractéristique p . Pour K un corps p -adique, on note K^{nr} l'extension maximale non ramifiée de K et K^{mr} l'extension maximale modérément ramifiée. De plus, I_K désigne le sous-groupe d'inertie de G_K .
- Lorsque K est une extension algébrique de \mathbb{Q}_p , K est toujours considéré comme inclus dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. On note W_K son groupe de Weil et $Art_K : K^\times \rightarrow W_K$ l'isomorphisme provenant de la théorie du corps de classes locale et envoyant l'inverse du Frobenius (arithmétique) sur une uniformisante.
- Pour $d \in \mathbb{N}^*$, on note ω_d un caractère fondamental $I_p \rightarrow \overline{\mathbb{F}_p}$ de niveau d , et $\tilde{\omega}_d$ son relèvement de Teichmüller.
- On note $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de \mathbb{Q} dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Toutes les extensions algébriques de \mathbb{Q} sont considérées comme contenues dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Si K est une telle extension et v est une place finie de K , on note $Frob_v$ un Frobenius arithmétique associé à la place v .
- Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note $F(a)$ la représentation de $\mathbb{F}_p^\times = GL_1(\mathbb{F}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ définie par $\mathbb{F}_p^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}_p}^\times, x \mapsto x^a$. Pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $0 \leq a - b \leq p - 1$, on note $F(a, b)$ la représentation $Sym^{a-b}(\overline{\mathbb{F}_p}) \otimes det^b$ de $GL_2(\mathbb{F}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$.

1.4 Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Florian Herzig pour m'avoir guidé au cours de ce travail, pour sa disponibilité, son aide précieuse et sa gentillesse. Je voudrais aussi remercier de manière générale le département de mathématiques de l'Université de Toronto pour m'avoir accueilli dans d'excellentes conditions afin de réaliser ce mémoire.

2 Quelques rappels sur les groupes algébriques

Dans cette partie, nous rappelons quelques faits fondamentaux concernant les groupes algébriques affines.

2.1 Groupes algébriques

Commençons par la définition d'un groupe algébrique :

Définition 2.1.1. (Groupe algébrique affine)

Soit k un anneau intègre. Un **groupe algébrique affine** sur k est un foncteur $G : k\text{-Alg} \rightarrow \mathbf{Ens}$ muni d'une transformation naturelle $m : G \times G \rightarrow G$ tel que :

- (i) pour toute k -algèbre R , $m(R)$ munit $G(R)$ d'une structure de groupe.
- (ii) le foncteur G est représentable par une k -algèbre $\mathcal{O}(G)$ de type fini.

Exemple 2.1.2. (i) Le foncteur $GL_n : R \mapsto GL_n(R)$, muni de la multiplication des matrices, est un groupe algébrique affine sur k , représenté par

$$\mathcal{O}(GL_n) = k[X_{ij}, Y_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n] / \left(\sum_{k=1}^n X_{ik}Y_{kj} - \delta_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \right),$$

où δ_{ij} vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. On note $\mathbb{G}_m = GL_1$.

(ii) Le foncteur $O_n : R \mapsto GL_n(R)$, muni de la multiplication des matrices, est un groupe algébrique affine sur k , représenté par

$$\mathcal{O}(O_n) = k[X_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n] / \left(\sum_{k=1}^n X_{ik}X_{jk} - \delta_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \right).$$

(iii) Soit V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme hermitienne B . Pour R une \mathbb{R} -algèbre, on note $U_B(R) = \{g \in GL(V \otimes_{\mathbb{R}} R) : \forall (u, v) \in (V \otimes_{\mathbb{C}} R)^2, B(g(u), g(v)) = B(u, v)\}$. Le foncteur ainsi défini U_B est un groupe algébrique affine sur \mathbb{R} .

Remarque 2.1.3. (Comultiplication)

Soit (G, m) un groupe algébrique. On dispose d'un morphisme de groupes

$$\text{Hom}_{k\text{-Alg}}(\mathcal{O}(G), \mathcal{O}(G) \otimes_k \mathcal{O}(G))^2 \rightarrow \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(\mathcal{O}(G), \mathcal{O}(G) \otimes_k \mathcal{O}(G)).$$

L'image de $(x \mapsto x \otimes 1, x \mapsto 1 \otimes x)$ est un morphisme de $\mathcal{O}(G)$ dans $\mathcal{O}(G) \otimes_k \mathcal{O}(G)$ que l'on appelle comultiplication et que l'on note Δ .

Comme d'habitude, lorsqu'on introduit des objets, il convient de définir des morphismes entre ces objets :

Définition 2.1.4. (Morphismes de groupes algébriques)

Un *morphisme de groupes algébriques* $u : G \rightarrow G'$ est une transformation naturelle de G vers G' telle que, pour toute k -algèbre R , $u(R)$ est un morphisme de groupes.

Exemple 2.1.5. On définit un morphisme de groupes algébriques $\det : GL_n \rightarrow \mathbb{G}_m$ en posant que $\det(R)$ soit le déterminant usuel des matrices.

Remarque 2.1.6. Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes algébriques. Notons Δ et Δ' les comultiplications respectives de G et G' . On dispose alors d'un morphisme de groupes

$$\text{Hom}_{k\text{-alg}}(\mathcal{O}(G), \mathcal{O}(G)) \rightarrow \text{Hom}_{k\text{-alg}}(\mathcal{O}(G'), \mathcal{O}(G)).$$

Notons f^* l'image de l'identité : c'est un morphisme de $\mathcal{O}(G')$ dans $\mathcal{O}(G)$ qui commute avec les comultiplications, c'est-à-dire $\Delta \circ f^* = (f^* \otimes f^*) \circ \Delta'$.

Réciproquement, si $f^* : \mathcal{O}(G') \rightarrow \mathcal{O}(G)$ est un morphisme de k -algèbres qui commute avec les comultiplications, alors $\circ f^* : G \rightarrow G'$ est un morphisme de groupes algébriques.

Par conséquent, se donner un morphisme de groupes algébriques revient à se donner un morphisme de k -algèbres qui commute avec les comultiplications.

Dans la suite de cette partie, on dira groupe algébrique au lieu de groupe algébrique affine et on supposera que k est un corps. À un groupe algébrique G est associé la k -variété $X_G = \text{Spec}(\mathcal{O}(G))$, et alors \bar{G} n'est autre que le foncteur des points de X_G .

2.2 Caractères et cocaractères

Définition 2.2.1. (Caractères et cocaractères)

Soit G un groupe algébrique.

- (i) Le groupe des **caractères** de G est, par définition, le groupe des morphismes de groupes algébriques de G dans \mathbb{G}_m . On le note $X^*(G)$.
- (ii) Le groupe des **cocaractères** de G est, par définition, le groupe des morphismes de groupes algébriques de \mathbb{G}_m dans G . On le note $X_*(G)$.

Exemple 2.2.2. Soit T_n le sous-groupe de GL_n des matrices diagonales. Dans ce cas, $\mathcal{O}(T_n) = k[X_1, \dots, X_n, X_1^{-1}, \dots, X_n^{-1}]$ et la comultiplication est donnée par $\Delta(X_i) = X_i \otimes X_i$. Les caractères de T_n correspondent aux éléments de $\mathcal{O}(T_n)$ de la forme $X_1^{a_1} \dots X_n^{a_n}$, pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Donc les caractères de T_n sont de la forme

$$T_n(R) \rightarrow R^\times, \left(\begin{array}{cccc} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & x_n \end{array} \right) \mapsto x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n},$$

et $X^*(T_n) \cong \mathbb{Z}^n$.

Les cocaractères de T_n sont de la forme :

$$R^\times \rightarrow T_n(R), t \mapsto \begin{pmatrix} t^{a_1} & & & \\ & t^{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & t^{a_n} \end{pmatrix},$$

avec $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, d'où $X_*(T_n) \cong \mathbb{Z}^n$.

2.3 Groupes unitaires

Considérons F un corps de type CM et notons F^+ le sous-corps totalement réel maximal de F , de sorte que F/F^+ est une extension quadratique imaginaire. Notons c l'élément non trivial de $Gal(F/F^+)$ (c'est la conjugaison complexe). Soit V un F -espace vectoriel de dimension n finie, muni d'une forme c -hermitienne $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow F$ non dégénérée, linéaire à gauche et semi-linéaire à droite. On définit alors un groupe algébrique G sur F^+ de la manière suivante : pour R une F^+ -algèbre, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induit naturellement une forme $c \otimes Id$ -hermitienne sur le $F \otimes_{F^+} R$ -module $V \otimes_{F^+} R$, et on pose alors :

$$G(R) = \{g \in GL_{F \otimes_{F^+} R}(V \otimes_{F^+} R) : \forall v, w \in V \otimes_{F^+} R, \langle g(v), g(w) \rangle = \langle v, w \rangle\}.$$

En munissant $G(R)$ de la composition des applications linéaires, G est un groupe algébrique sur F^+ . On dit alors que G est un **groupe unitaire**. On peut aussi définir G dans le langage matriciel. En effet, fixons une base de V et notons $J \in \mathcal{M}_n(F)$ la matrice de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans cette base. Pour R une F^+ -algèbre,

$$G(R) = \{g \in GL_n(F \otimes_{F^+} R) : (g^t)J\bar{g} = J\},$$

où g^t désigne la transposée de g et \bar{g} désigne $(c \otimes Id)(g)$.

Soit maintenant R une F -algèbre et considérons l'isomorphisme

$$\begin{aligned} F \otimes_{F^+} R &\rightarrow R \times R \\ \lambda \otimes r &\mapsto (\lambda r, \bar{\lambda} r). \end{aligned}$$

En identifiant $F \otimes_{F^+} R$ et $R \times R$ par cet isomorphisme, on remarque que :

$$\begin{aligned} G(R) &= \{(g_1, g_2) \in GL_n(R) \times GL_n(R) : (g_1^t, g_2^t)(J, \bar{J})(g_2, g_1) = (J, \bar{J})\} \\ &= \{(g_1, g_2) \in GL_n(R) \times GL_n(R) : (g_1^t)Jg_2 = J\} \cong GL_n(R). \end{aligned}$$

Par conséquent, G est une forme de GL_n : on a un isomorphisme de groupes algébriques sur F :

$$\iota : G \times_{F^+} F \cong GL(V).$$

Soient maintenant w une place de F et $v = w|_{F^+}$. Supposons v totalement décomposée dans F , et notons w^c l'autre place de F au-dessus de v . Nous disposons de deux isomorphismes $\iota_w : G(F_w) \rightarrow GL_n(F_w)$ et $\iota_{w^c} : G(F_{w^c}) \rightarrow GL_n(F_{w^c})$, ainsi que de deux isomorphismes $c : G(F_w) \rightarrow G(F_{w^c})$ et $c : GL_n(F_w) \rightarrow GL_n(F_{w^c})$ induits par $c : F_w \rightarrow F_{w^c}$ par functorialité. On remarque alors que, pour $g \in GL_3(F_w)$, on a $\iota_w c^{-1} \iota_{w^c}^{-1} c(g) = J^{-1}(g^t)^{-1} J$. Par conséquent, $\iota_w^{-1} c \iota_{w^c} c^{-1}$ est conjugué avec $g \mapsto (g^t)^{-1}$.

Pour terminer, on dira que G est **compact à l'infini** si la forme c -hermitienne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive ou définie négative sur $V \otimes F_v^+$ pour toute place v archimédienne de F^+ .

3 Quelques rappels en théorie des représentations

Dans cette partie, nous rappelons un certain nombre de résultats en théorie des représentations, qui seront utiles par la suite. Dans les deux premières sections, on s'intéresse aux représentations irréductibles du groupe linéaire d'un corps fini aussi bien en caractéristique 0 qu'en caractéristique p . Dans la troisième section, on rappelle certains aspects de la théorie de Jantzen, pour donner les composantes de Jordan-Hölder de certaines représentations en caractéristique p . Dans la quatrième section, nous énonçons un isomorphisme qui sera utile pour définir des algèbres de Hecke. Finalement, dans la cinquième section, nous énonçons la correspondance de Langlands locale.

3.1 Quelques tables de caractères

C'est en 1951 que Robert Steinberg construit les tables de caractères de $GL_3(\mathbb{F}_q)$, $GL_4(\mathbb{F}_q)$, $PGL_3(\mathbb{F}_q)$ et $PGL_4(\mathbb{F}_q)$, pour q une puissance d'un nombre premier p (voir [Ste51]). Dans cette section, nous suivons ses pas afin de déterminer la table de caractères de $GL_3(\mathbb{F}_q)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Pour ce faire, nous avons besoin d'étudier préalablement les représentations irréductibles de $GL_2(\mathbb{F}_q)$.

Dans les parties qui suivent, on notera $[\cdot] : \overline{\mathbb{F}_p} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ les représentants de Teichmüller.

3.1.1 Table des caractères de $GL_2(\mathbb{F}_q)$

Posons $G = GL_2(\mathbb{F}_q)$, et notons α et β des éléments primitifs de \mathbb{F}_q et \mathbb{F}_{q^2} tels que $\alpha = \beta^{q+1}$. On sait que le nombre de représentations irréductibles de G est égal au nombre de classes de conjugaison de G . Voici donc la liste des classes de conjugaison de $GL_2(\mathbb{F}_q)$:

$$A_1^a = \begin{pmatrix} \alpha^a & \\ & \alpha^a \end{pmatrix}, A_2^a = \begin{pmatrix} \alpha^a & \\ 1 & \alpha^a \end{pmatrix}, A_3^{a,b} = \begin{pmatrix} \alpha^a & \\ & \alpha^b \end{pmatrix}, B_1^c = \begin{pmatrix} \beta^c & \\ & \beta^{cq} \end{pmatrix},$$

où a, b décrivent $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ et sont distincts et c décrit $(\mathbb{Z}/(q^2-1)\mathbb{Z})/(x \sim qx)$ avec $q+1 \nmid c$. On obtient donc :

Famille de classes	Nombre de classes	Nombre d'éléments de chaque classe
A_1	$q-1$	1
A_2	$q-1$	$(q+1)(q-1)$
A_3	$\frac{(q-1)(q-2)}{2}$	$q(q+1)$
B_1	$\frac{q(q-1)}{2}$	$q(q-1)$

Le groupe G agit sur l'espace projectif $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$, d'où une représentation ρ_X de G sur $\overline{\mathbb{Q}_p}[X]$ de dimension $q+1$. Comme l'action de G sur X est doublement transitive (c'est-à-dire l'action est transitive et, pour tout élément $x \in X$, le stabilisateur de x agit transitivement sur $X - \{x\}$), ρ_X se décompose en somme directe $1 \oplus \theta_X$ avec θ_X irréductible de dimension q . On obtient ainsi, par multiplication par des puissances du déterminant, $2(q-1)$ représentations irréductibles distinctes de G : les $[\cdot] \circ \det^n$ (nous noterons leurs caractères $\theta_1^{(n)}$) et les $\theta_X \cdot ([\cdot] \circ \det^n)$ (nous noterons leurs caractères $\theta_q^{(n)}$), pour $1 \leq n \leq q-1$.

Soit maintenant B le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures de G . Pour $1 \leq m, n \leq q-1$, on dispose du caractère :

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ * & y \end{pmatrix} \mapsto [x^m y^n].$$

En induisant ce caractère dans le groupe G , on obtient une représentation de degré $q+1$ de G , qui est irréductible dès que $m \neq n$. Notons $\theta_{q+1}^{(m,n)}$ le caractère de cette représentation lorsque $m < n$. On obtient alors $\frac{(q-1)(q-2)}{2}$ caractères de représentations irréductibles distinctes de G .

Considérons finalement le sous-groupe cyclique engendré par une matrice M semblable à B_1^1 . On dispose du caractère $M \mapsto [\beta]^n$ ($1 \leq n \leq q^2-1$). Notons $\psi_{q(q-1)}^{(n)}$ le caractère de son induit à G . On vérifie alors que $\theta_q^{(q-1)} \theta_{q+1}^{(q-1,n)} - \theta_{q+1}^{(q-1,n)} - \psi_{q(q-1)}^{(n)}$ est le caractère d'une représentation irréductible de G de degré $q-1$ lorsque n n'est pas multiple de $q+1$. Notons $\theta_{q-1}^{(n)}$ le caractère ainsi obtenu. Il ne dépend que de la classe de n modulo la relation $n \sim nq$. Nous avons ainsi trouvé $\frac{q(q-1)}{2}$ nouveaux caractères de représentations irréductibles distinctes. Nous pouvons donc finalement construire la table de caractères de G :

	$\theta_1^{(n)}$	$\theta_q^{(n)}$	$\theta_{q+1}^{(m,n)}$
	$1 \leq n \leq q-1$	$1 \leq n \leq q-1$	$1 \leq m < n \leq q-1$
$A_1^{(a)}$	$[\alpha]^{2na}$	$q[\alpha]^{2na}$	$(q+1)[\alpha]^{(m+n)a}$
$A_2^{(a)}$	$[\alpha]^{2na}$	0	$[\alpha]^{(m+n)a}$
$A_3^{(a,b)}$	$[\alpha]^{n(a+b)}$	$[\alpha]^{n(a+b)}$	$[\alpha]^{ma+nb} + [\alpha]^{na+mb}$
$B_1^{(c)}$	$[\alpha]^{nc}$	$-[\alpha]^{nc}$	0

	$\theta_{q-1}^{(n)}$
	$1 \leq n \leq q^2 - 1, q + 1 \nmid n, n \sim nq$
$A_1^{(a)}$	$(q - 1)[\beta]^{nc(q+1)}$
$A_2^{(a)}$	$-\beta^{nc(q+1)}$
$A_3^{(a,b)}$	0
$B_1^{(c)}$	$-\alpha^{nc} - \alpha^{ncq}$

Les représentations dans la dernière famille ne sont pas induites à partir d'un sous-groupe parabolique de $GL_2(\mathbb{F}_q)$ et sont dites **cuspidales**. Il est en fait possible de les paramétrer à l'aide de caractères de $\mathbb{F}_{q^2}^\times$. On dit qu'un caractère $\chi : \mathbb{F}_{q^2}^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ est **primitif** s'il est injectif. On vérifie immédiatement que les caractères primitifs sont donnés par des puissances du relèvement de Teichmüller, plus précisément par les $[\cdot]^n : \mathbb{F}_{q^2}^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ pour $1 \leq n \leq q^2 - 1$ avec $q + 1 \nmid n$. On définit alors :

Définition 3.1.1. (Représentations cuspidales)

Pour $\chi : \mathbb{F}_{q^2}^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ un caractère primitif, si n est l'entier entre 1 et $q^2 - 1$ non multiple de $q + 1$ tel que $\chi = [\cdot]^n$, on appelle $R_2(\chi)$ la représentation $\theta_{q-1}^{(n)}$.

3.1.2 Table des caractères de $GL_3(\mathbb{F}_q)$

Posons $G = GL_3(\mathbb{F}_q)$. Notons α, β et γ des éléments primitifs de $\mathbb{F}_q, \mathbb{F}_{q^2}$ et \mathbb{F}_{q^3} tels que $\alpha = \beta^{q+1} = \gamma^{q^2+q+1}$. Voici la liste des classes de conjugaison de $GL_3(\mathbb{F}_q)$:

$$\begin{aligned}
A_1^a &= \begin{pmatrix} \alpha^a & & \\ & \alpha^a & \\ & & \alpha^a \end{pmatrix}, A_2^a = \begin{pmatrix} \alpha^a & & \\ & 1 & \alpha^a \\ & & \alpha^a \end{pmatrix}, A_3^a = \begin{pmatrix} \alpha^a & & \\ & 1 & \alpha^a \\ & & 1 & \alpha^a \end{pmatrix}, \\
A_4^{a,b} &= \begin{pmatrix} \alpha^a & & \\ & \alpha^a & \\ & & \alpha^b \end{pmatrix}, A_5^{a,b} = \begin{pmatrix} \alpha^a & & \\ & 1 & \alpha^a \\ & & \alpha^b \end{pmatrix}, A_6^{a,b,c} = \begin{pmatrix} \alpha^a & & \\ & \alpha^b & \\ & & \alpha^c \end{pmatrix}, \\
B_1^{a,d} &= \begin{pmatrix} \alpha^a & & \\ & \beta^d & \\ & & \beta^{dq} \end{pmatrix}, C_1^e = \begin{pmatrix} \gamma^e & & \\ & \gamma^{eq} & \\ & & \gamma^{eq^2} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

où a, b, c décrivent $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ et sont deux à deux distincts, d décrit $(\mathbb{Z}/(q^2-1)\mathbb{Z})/(x \sim qx)$ avec $q+1 \nmid d$, et e décrit $(\mathbb{Z}/(q^3-1)\mathbb{Z})/(x \sim qx)$ avec $q^2+q+1 \nmid e$. On obtient donc :

Famille de classes	Nombre de classes	Nombre d'éléments de chaque classe
A_1	$q - 1$	1
A_2	$q - 1$	$(q + 1)(q - 1)(q^2 + q + 1)$
A_3	$q - 1$	$q(q + 1)(q - 1)^2(q^2 + q + 1)$
A_4	$(q - 1)(q - 2)$	$q^2(q^2 + q + 1)$
A_5	$(q - 1)(q - 2)$	$q^2(q + 1)(q - 1)(q^2 + q + 1)$
A_6	$\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6}$	$q^3(q + 1)(q^2 + q + 1)$
B_1	$\frac{q(q-1)^2}{2}$	$q^3(q - 1)(q^2 + q + 1)$
C_1	$\frac{q(q+1)(q-1)}{3}$	$q^3(q + 1)(q - 1)^2$
Total	$q(q + 1)(q - 1)$	-

Le groupe G agit sur l'espace projectif $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$, d'où une représentation ρ_X de G sur $\overline{\mathbb{Q}_p}[X]$ de dimension $q^2 + q + 1$. Comme l'action de G sur X est doublement transitive, ρ_X se décompose en somme directe $1 \oplus \chi_X$ avec χ_X irréductible de dimension $q^2 + q$. On obtient ainsi, par multiplication par des puissances du déterminant, $2(q - 1)$ représentations irréductibles distinctes de G : les $[\cdot] \circ \det^n$ (nous noterons leurs caractères $\chi_1^{(n)}$) et les $\chi_X \cdot ([\cdot] \circ \det^n)$ (nous noterons leurs caractères $\chi_{q^2+q}^{(n)}$), pour $1 \leq n \leq q - 1$.

D'autre part, considérons Y l'ensemble des couples formés d'une droite de \mathbb{F}_q^3 et d'un hyperplan qui la contient. Encore une fois, G agit sur Y , d'où une représentation ρ_Y de G sur $\overline{\mathbb{Q}_p}[Y]$ de dimension $(q + 1)(q^2 + q + 1)$. On vérifie aisément que ρ_Y se décompose en somme directe $\rho_Y = 1 \oplus 2\chi_{q^2+q}^{(1)} \oplus \chi_Y$, où χ_Y est irréductible de dimension q^3 . On obtient ainsi $q - 1$ nouvelles représentations irréductibles distinctes de G de dimension q^3 : les $\chi_Y \cdot ([\cdot] \circ \det^n)$ (nous noterons leurs caractères $\chi_{q^3}^{(n)}$), pour $1 \leq n \leq q - 1$.

Considérons maintenant le sous-groupe parabolique de $GL_3(\mathbb{F}_q)$:

$$P_{(1,2)}^-(\mathbb{F}_q) = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Le produit d'un caractère χ de \mathbb{F}_q^* et d'une représentation θ de $GL_2(\mathbb{F}_q)$ fournit une représentation de $P_{(1,2)}^-(\mathbb{F}_q)$. Nous avons donc essentiellement quatre situations :

- (i) Le caractère χ est la puissance m -ième composée avec $[\cdot]$, $1 \leq m \leq q - 1$, et $\theta = \theta_1^{(n)}$, $1 \leq n \leq q - 1$. Dans ce cas, en induisant $\chi \cdot \theta$ à G , on obtient des représentations irréductibles distinctes de G lorsque $m \neq n$: elles sont de dimension $q^2 + q + 1$. Notons alors $\chi_{q^2+q+1}^{(m,n)}$ les caractères correspondants. Il y en a $(q - 1)(q - 2)$.
- (ii) Le caractère χ est la puissance m -ième composée avec $[\cdot]$, $1 \leq m \leq q - 1$, et $\theta = \theta_q^{(n)}$, $1 \leq n \leq q - 1$. Dans ce cas, en induisant $\chi \cdot \theta$ à G , on obtient des représentations irréductibles distinctes de G lorsque $m \neq n$: elles sont de

dimension $q(q^2 + q + 1)$. Notons alors $\chi_{q(q^2+q+1)}^{(m,n)}$ les caractères correspondants. Il y en a $(q-1)(q-2)$.

(iii) Le caractère χ est la puissance l -ième composée avec $[\cdot]$, $1 \leq l \leq q-1$, et $\theta = \theta_{q+1}^{(m,n)}$, $1 \leq m < n \leq q-1$. Dans ce cas, en induisant $\chi \cdot \theta$ à G , on obtient des représentations irréductibles distinctes de G lorsque $l < m < n$: elles sont de dimension $(q+1)(q^2 + q + 1)$. Notons alors $\chi_{(q+1)(q^2+q+1)}^{(l,m,n)}$ les caractères correspondants. Il y en a $\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6}$.

(iv) Le caractère χ est la puissance m -ième composée avec $[\cdot]$, $1 \leq m \leq q-1$, et $\theta = \theta_{q-1}^{(n)}$, $1 \leq n \leq q^2 - 1$, $q+1 \nmid n$. Dans ce cas, en induisant $\chi \cdot \theta$ à G , on obtient des représentations irréductibles distinctes de G : elles sont de dimension $(q-1)(q^2 + q + 1)$. Notons alors $\chi_{(q-1)(q^2+q+1)}^{(m,n)}$ les caractères correspondants. Il y en a $\frac{q(q-1)^2}{2}$.

Considérons finalement le sous-groupe cyclique engendré par une matrice M semblable à C_1^1 . On dispose du caractère $M \mapsto [\gamma]^n$ ($1 \leq n \leq q^3 - 1$). Notons $\psi_{q^3(q+1)(q-1)^2}^{(n)}$ le caractère de son induit à G . On vérifie alors que $\psi_{q^3(q+1)(q-1)^2}^{(n)} - (\chi_{q^3}^{(q-1)} - \chi_{q^2+q}^{(q-1)} + \chi_1^{(q-1)})\chi_{(q-1)(q^2+q+1)}^{(q-1,n)}$ est le caractère d'une représentation irréductible de G de degré $(q+1)(q-1)^2$ lorsque n n'est pas multiple de $q^2 + q + 1$. Notons $\theta_{(q+1)(q-1)^2}^{(n)}$ le caractère ainsi obtenu. Il ne dépend que de la classe de n modulo la relation $n \sim nq$. Nous avons ainsi trouvé $\frac{q(q+1)(q-1)}{3}$ nouveaux caractères de représentations irréductibles distinctes. Nous pouvons donc finalement construire la table de caractères de G :

	$\chi_1^{(n)}$	$\chi_{q^2+q}^{(n)}$	$\chi_{q^3}^{(n)}$
	$1 \leq n \leq q-1$	$1 \leq n \leq q-1$	$1 \leq n \leq q-1$
$A_1^{(a)}$	$[\alpha]^{3na}$	$(q^2 + q)[\alpha]^{3na}$	$q^3[\alpha]^{3na}$
$A_2^{(a)}$	$[\alpha]^{3na}$	$q[\alpha]^{3na}$	0
$A_3^{(a)}$	$[\alpha]^{3na}$	0	0
$A_4^{(a,b)}$	$[\alpha]^{n(2a+b)}$	$(q+1)[\alpha]^{n(2a+b)}$	$q[\alpha]^{n(2a+b)}$
$A_5^{(a,b)}$	$[\alpha]^{n(2a+b)}$	$[\alpha]^{n(2a+b)}$	0
$A_6^{(a,b,c)}$	$[\alpha]^{n(a+b+c)}$	$2[\alpha]^{n(a+b+c)}$	$[\alpha]^{n(a+b+c)}$
$B_1^{(a,d)}$	$[\alpha]^{n(a+b)}$	0	$-[\alpha]^{n(a+b)}$
$C_1^{(e)}$	$[\alpha]^{na}$	$-[\alpha]^{na}$	$[\alpha]^{na}$

	$\chi_{q^2+q+1}^{(m,n)}$	$\chi_{q(q^2+q+1)}^{(m,n)}$
	$1 \leq m, n \leq q-1, m \neq n$	$1 \leq m, n \leq q-1, m \neq n$
$A_1^{(a)}$	$(q^2 + q + 1)[\alpha]^{(m+2n)a}$	$q(q^2 + q + 1)[\alpha]^{(m+2n)a}$
$A_2^{(a)}$	$(q + 1)[\alpha]^{(m+2n)a}$	$q[\alpha]^{(m+2n)a}$
$A_3^{(a)}$	$[\alpha]^{(m+2n)a}$	0
$A_4^{(a,b)}$	$(q + 1)[\alpha]^{(m+n)a+nb} + [\alpha]^{2na+mb}$	$(q + 1)[\alpha]^{(m+n)a+nb} + q[\alpha]^{2na+mb}$
$A_5^{(a,b)}$	$[\alpha]^{(m+n)a+nb} + [\alpha]^{2na+mb}$	$[\alpha]^{(m+n)a+nb}$
$A_6^{(a,b,c)}$	$\sum_{(a,b,c)}^{cycl} [\alpha]^{ma+n(b+c)}$	$\sum_{(a,b,c)}^{cycl} [\alpha]^{ma+n(b+c)}$
$B_1^{(a,d)}$	$[\alpha]^{ma+nb}$	$-[\alpha]^{ma+nb}$
$C_1^{(e)}$	0	0
	$\chi_{(q+1)(q^2+q+1)}^{(l,m,n)}$	$\chi_{(q-1)(q^2+q+1)}^{(m,n)}$
	$1 \leq l < n < m \leq q-1$	$1 \leq m \leq q-1, 1 \leq n \leq q^2-1, q+1 \nmid n$
$A_1^{(a)}$	$(q + 1)(q^2 + q + 1)[\alpha]^{(l+m+n)a}$	$(q - 1)(q^2 + q + 1)[\beta]^{(m+n)a(q+1)}$
$A_2^{(a)}$	$(2q + 1)[\alpha]^{(l+m+n)a}$	$[\beta]^{(m+n)a(q+1)}$
$A_3^{(a)}$	$[\alpha]^{(l+m+n)a}$	$[\beta]^{(m+n)a(q+1)}$
$A_4^{(a,b)}$	$(q + 1) \sum_{(l,m,n)}^{cycl} [\alpha]^{(l+m)a+nb}$	$(q - 1)[\beta]^{(na+mb)(q+1)}$
$A_5^{(a,b)}$	$\sum_{(l,m,n)}^{cycl} [\alpha]^{(l+m)a+nb}$	$[\beta]^{(na+mb)(q+1)}$
$A_6^{(a,b,c)}$	$\sum_{(l,m,n)}^{sym} [\alpha]^{la+mb+nc}$	0
$B_1^{(a,d)}$	0	$-[\beta]^{ma(q+1)}([\beta]^{nb} + [\beta]^{nbq})$
$C_1^{(e)}$	0	0
	$\chi_{(q+1)(q-1)^2}^{(n)}$	
	$1 \leq n \leq q^3-1, q^2+q+1 \nmid n, n \sim qn$	
$A_1^{(a)}$	$(q + 1)(q - 1)^2[\gamma]^{na(q^2+q+1)}$	
$A_2^{(a)}$	$-(q - 1)[\gamma]^{na(q^2+q+1)}$	
$A_3^{(a)}$	$[\gamma]^{na(q^2+q+1)}$	
$A_4^{(a,b)}$	0	
$A_5^{(a,b)}$	0	
$A_6^{(a,b,c)}$	0	
$B_1^{(a,d)}$	0	
$C_1^{(e)}$	$[\gamma]^{na} + [\gamma]^{naq} + [\gamma]^{naq^2}$	

Les représentations dans cette dernière famille ne sont pas induites à partir d'un sous-groupe parabolique de $GL_3(\mathbb{F}_q)$ et sont dites **cuspidales**. Il est possible de les paramétrer à l'aide de caractères de $\mathbb{F}_{q^3}^\times$. On dit qu'un caractère $\chi : \mathbb{F}_{q^3}^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ est **primitif** s'il est injectif. On vérifie immédiatement que les caractères primitifs sont donnés par des puissances du relèvement de Teichmüller, plus précisément

par les $[\cdot]^n : \mathbb{F}_{q^3}^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ pour $1 \leq n \leq q^3 - 1$ avec $q^2 + q + 1 \nmid n$. On définit alors :

Définition 3.1.2. (Représentations cuspidales)

Pour $\chi : \mathbb{F}_{q^3}^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ un caractère primitif, si n est l'entier entre 1 et $q^3 - 1$ non multiple de $q^2 + q + 1$ tel que $\chi = [\cdot]^n$, on appelle $R_3(\chi)$ la représentation $\chi_{(q+1)(q-1)^2}^{(n)}$.

3.2 Représentations en caractéristique p : poids de Serre locaux

Dans cette partie, on s'intéresse à des représentations du groupe linéaire d'un corps fini en caractéristique p . On cherche plus particulièrement à construire les représentations irréductibles de $GL_3(\mathbb{F}_q)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}_p}$, où p est premier et q une puissance de p , disons p^n .

Notons \mathbb{Z}_+^3 l'ensemble des 3-uplets d'entiers $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. Notons B_3^+ le sous-groupe de GL_3 formé des matrices triangulaires supérieures, B_3^- le sous-groupe de GL_3 formé des matrices triangulaires inférieures et T_3 le sous-groupe des matrices diagonales. Notons aussi les sous-groupes paraboliques :

$$P_{(1,2)}^+ = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix},$$

$$P_{(2,1)}^+ = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Un élément de \mathbb{Z}_+^3 peut alors être vu comme un caractère dans $X^*(T_3)$, étant donné que $X^*(T_3) \cong \mathbb{Z}^3$. Ainsi, si $\lambda \in \mathbb{Z}_+^3$, alors λ définit un caractère de B_3^- (en voyant T_3 comme le quotient de B_3^- par le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures n'ayant que des 1 sur la diagonale). Nous pouvons donc considérer la représentation de GL_3 obtenue par induction :

Définition 3.2.1. (Le module M_λ)

Pour tout anneau commutatif A , on appelle $M_\lambda(A)$ le A -module suivant :

$$\text{Ind}_{B_3^-|A}^{GL_3|A}(\lambda) = \{f : GL_3|_A \rightarrow \mathbb{G}_a|_A : \\ \forall R \in A - \text{alg}, \forall g \in GL_3(R), \forall b \in B_3^-(R), f(bg) = \lambda(b)f(g)\}.$$

On remarque immédiatement que, pour tout anneau commutatif A , $GL_3(A)$ agit sur $M_\lambda(A)$ par $(g' \cdot f)(g) = f(gg')$. Le module M_λ définit donc une représentation algébrique de GL_3 sur \mathbb{Z} : pour tout anneau commutatif A , $GL_3(A)$ agit fonctoriellement sur le A -module libre de type fini $M_\lambda(A) \cong M_\lambda(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} A$.

Rappelons que le **socle** d'une représentation est la somme de ses sous-représentations irréductibles. Notons alors N_λ le socle de $M_\lambda|_{\mathbb{F}_q}$. C'est une représentation algébrique de $GL_3|_{\mathbb{F}_q}$.

Considérons maintenant un élément a de $(\mathbb{Z}_+^3)^{Hom(\mathbb{F}_q, \overline{\mathbb{F}_p})}$. Définissons alors la représentation de $GL_3(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ suivante :

$$F_a = \bigotimes_{\sigma \in Hom(\mathbb{F}_q, \overline{\mathbb{F}_p})} (N_{a_\sigma}(\mathbb{F}_q) \otimes_{\mathbb{F}_q, \sigma} \overline{\mathbb{F}_p}).$$

On dit que a est un **poids restreint local** si, pour tout $\sigma \in Hom(\mathbb{F}_q, \overline{\mathbb{F}_p})$ et tout $i \in \{1, 2\}$, on a l'inégalité $a_{\sigma, i} - a_{\sigma, i+1} \leq p - 1$. Nous sommes en mesure d'énoncer le théorème suivant, qui n'est autre que le théorème 3.10 dans [Her09] :

Théorème 3.2.2. (Représentations irréductibles de $GL_3(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$)

- (i) Soit a un poids restreint local. Alors F_a est une représentation irréductible de $GL_3(\mathbb{F}_q)$.
- (ii) Toute représentation irréductible de $GL_3(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ est isomorphe à F_a pour un certain poids restreint local a .
- (iii) Soient a et b deux poids restreints locaux. Les représentations F_a et F_b sont isomorphes si, et seulement si, pour tout $\sigma \in Hom(\mathbb{F}_q, \overline{\mathbb{F}_p})$ et pour $i \in \{1, 2\}$, on a

$$a_{\sigma, i} - a_{\sigma, i+1} = b_{\sigma, i} - b_{\sigma, i+1},$$

et, pour tout $x \in \mathbb{F}_q^\times$, on a

$$\prod_{\sigma \in Hom(\mathbb{F}_q, \overline{\mathbb{F}_p})} \sigma(x)^{a_{\sigma, 3} - b_{\sigma, 3}} = 1.$$

Remarque 3.2.3. (i) Dans $GL_3(\mathbb{F}_q)$, il y a $q^2(q-1)$ classes de conjugaison d'ordre premier avec p (ce sont celles des familles A_1, A_4, A_6, B_1 et C_1). Il y a donc le bon nombre de représentations irréductibles.

- (ii) Fixons $\sigma_0 \in Hom(\mathbb{F}_q, \overline{\mathbb{F}_p})$. Notons $\phi \in Gal(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)$ le Frobenius, puis pour $1 \leq i \leq n-1$, posons $\sigma_i = \sigma_0 \circ \phi^i$. Alors $Hom(\mathbb{F}_q, \overline{\mathbb{F}_p}) = \{\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1}\}$, et donc on a $\prod_{\sigma \in Hom(\mathbb{F}_q, \overline{\mathbb{F}_p})} \sigma(x)^{a_{\sigma, 3} - b_{\sigma, 3}} = 1$ pour tout $x \in \mathbb{F}_q^\times$ si, et seulement si, $q-1|(a_{\sigma_0, 3} - b_{\sigma_0, 3}) + p(a_{\sigma_1, 3} - b_{\sigma_1, 3}) + p^2(a_{\sigma_2, 3} - b_{\sigma_2, 3}) + \dots + p^{n-1}(a_{\sigma_{n-1}, 3} - b_{\sigma_{n-1}, 3})$.

Considérons maintenant le cas où $q = p$. Le théorème précédent se réécrit alors :

Corollaire 3.2.4. (Représentations irréductibles de $GL_3(\mathbb{F}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$)

- (i) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}_+^3$ un poids restreint local. Alors $F_{(a, b, c)}$ est une représentation irréductible de $GL_3(\mathbb{F}_p)$, que l'on notera plutôt $F(a, b, c)$
- (ii) Toute représentation irréductible de $GL_3(\mathbb{F}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ est isomorphe à $F(a, b, c)$ pour un certain poids restreint local $(a, b, c) \in \mathbb{Z}_+^3$.

(iii) Soient (a, b, c) et (a', b', c') deux poids restreints locaux dans \mathbb{Z}_+^3 . Les représentations $F(a, b, c)$ et $F(a', b', c')$ sont isomorphes si, et seulement si, $a - b = a' - b'$, $b - c = b' - c'$ et $a + b + c \equiv a' + b' + c' \pmod{3(p-1)}$.

Dans la suite, on appellera **poids de Serre local** toute représentation irréductible de $GL_3(\mathbb{F}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$. Nous venons de voir que les poids de Serre locaux sont paramétrés par des triplets d'entiers (a, b, c) qui sont des poids restreints locaux. On dira que le poids de Serre local $F(a, b, c)$ est :

- **régulier** si $a - b < p - 1$ et $b - c < p - 1$, de sorte qu'il y a une bijection entre les poids de Serre locaux réguliers et $(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^3$.
- **générique** si $3 < a - b < p - 5$, $3 < b - c < p - 5$ et $|a - c - (p - 2)| > 4$.
- **fortement générique** si $5 < a - b < p - 7$, $5 < b - c < p - 7$ et $|a - c - (p - 2)| > 6$.

Pour (a, b, c) un triplet quelconque d'entiers, on notera $F(a, b, c)_{reg}$ le poids de Serre local régulier $F(a', b', c')$ tel que $(a', b', c') \equiv (a, b, c) \pmod{p-1}$. Étant donné un poids de Serre local $F(a, b, c)$ ((a, b, c) étant un poids restreint), on notera dans la suite $\mathcal{R}(F(a, b, c))$ le poids de Serre local régulier $F(c - 2, b - 1, a)_{reg}$.

Il sera utile dans la suite d'introduire deux sous-ensembles de l'ensemble des poids de Serre locaux : on dira que $F(a, b, c)$ est dans l'**alcôve inférieure** si $a - c < p - 2$ et dans l'**alcôve supérieure** s'il est régulier et $a - c > p - 2$. On dira aussi que $F(a, b, c)$ est dans l'**alcôve inférieure au sens large** si $a - c \leq p - 2$. Remarquons finalement que, si $F(a, b, c)$ est un poids de Serre local dans l'alcôve inférieure, alors $F(c + p - 2, b, a - p + 2)$ est un poids de Serre local dans l'alcôve supérieure, que nous noterons $R(F)$.

3.3 Décompositions de certaines représentations en caractéristique p : théorie de Jantzen

Certaines représentations de $GL_3(\mathbb{F}_p)$ en caractéristique p joueront des rôles particulièrement importants dans la suite : c'est le cas, par exemple, de la réduction modulo p de $Ind_{B_3^+(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)}([\cdot]^a \otimes [\cdot]^b \otimes [\cdot]^c)$ (où $[\cdot]$ est le représentant de Teichmüller)

ou de la réduction modulo p de $R(\chi)$ pour $\chi : \mathbb{F}_{q^3}^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ un caractère primitif. Il convient donc de connaître leurs composantes de Jordan-Hölder.

Pour ce faire, nous devons d'abord introduire le module de Weyl :

Définition 3.3.1. (Module de Weyl)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}_+^3$. On appelle **module de Weyl** le $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -module libre de type fini :

$$W_{(a,b,c)} = M_{(a,b,c)}(\mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{Z}_p}.$$

On le notera aussi parfois $W(a, b, c)$. Il est naturellement muni d'une action de $GL_3(\mathbb{Z}_p)$.

Remarque 3.3.2. *En fait, on remarque que $W(a, b, c) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p} \cong M_{(a,b,c)}(\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}_p}$ est muni naturellement d'une action de $GL_3(\mathbb{Q}_p)$. On observe aussi immédiatement que l'on dispose d'une injection naturelle $F(a, b, c) \hookrightarrow W(a, b, c) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}$, compatible avec l'action de $GL_3(\mathbb{F}_p)$. On notera dans la suite $\overline{W(a, b, c)} = W(a, b, c) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}$.*

Ces modules de Weyl permettent alors de décomposer les réductions de certaines représentations en caractéristique 0 dans le groupe de Grothendieck grâce à la formule de Jantzen :

Théorème 3.3.3. (Quelques cas particuliers de la formule de Jantzen)

Si V est une représentation de $GL_3(\mathbb{F}_p)$ sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$, on note \overline{V} une réduction de V modulo p .

(i) *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $a \geq b \geq c$ et $a - c < p$. Alors, dans le groupe de Grothendieck :*

$$\begin{aligned} \overline{Ind_{B_3^+(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)}([\cdot]^a \otimes [\cdot]^b \otimes [\cdot]^c)} &= \overline{W(a, b, c)} + \overline{W(a, c, b - p + 1)} + \overline{W(b, c, a - p + 1)} \\ &\quad + \overline{W(b + p - 1, a, c)} + \overline{W(c + p - 1, a, b)} \\ &\quad + \overline{W(c + p - 1, b, a - p + 1)}. \end{aligned}$$

(ii) *Soit $(a, d_0, d_1) \in \mathbb{Z}_+^3$ tel que $a \geq d_0 > d_1$ et $a - d_1 < p$. Alors, dans le groupe de Grothendieck :*

$$\begin{aligned} \overline{Ind_{P_{(1,2)}^+(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)}([\cdot]^a \otimes R_2([\cdot]^{d_0+pd_1}))} &= \overline{W(a, d_0 - 1, d_1 + 1)} + \overline{W(a, d_1, d_0 - p + 1)} \\ &\quad + \overline{W(d_0 - 1, d_1 + 1, a - p + 1)} \\ &\quad + \overline{W(d_0 + p - 2, a, d_1 + 1)} \\ &\quad + \overline{W(d_1 + p - 2, a, d_0 + 1)} \\ &\quad + \overline{W(d_1 + p - 1, d_0, a - p + 1)}. \end{aligned}$$

(iii) *Soit $(e_0, e_1, e_2) \in \mathbb{Z}_+^3$ tel que $e_0 > e_1 \geq e_2$ et $e_0 - e_2 \leq p$. Alors, dans le groupe de Grothendieck :*

$$\begin{aligned} \overline{R_3([\cdot]^{e_0+pe_1+p^2e_2})} &= \overline{W(e_0 - 2, e_1 + 1, e_2 + 1)} + \overline{W(e_0 - 1, e_2, e_1 - p + 2)} \\ &\quad + \overline{W(e_1 - 1, e_2 + 1, e_0 - p + 1)} + \overline{W(e_1 + p - 1, e_0 - 1, e_2 + 1)} \\ &\quad + \overline{W(e_2 + p - 1, e_1, e_0 - p + 1)} + \overline{W(e_2 + p - 2, e_0, e_1 + 1)}. \end{aligned}$$

Démonstration. On pourra aller voir le théorème 5.2, ainsi que le théorème 3.4 de l'annexe, de [Her09]. On pourra aussi se référer à la preuve de la proposition 7.4 du même article. \square

Pour connaître les composantes de Jordan-Hölder de ces représentations, il suffit donc de connaître les composantes des modules de Weyl :

Proposition 3.3.4. (Composantes de Jordan-Hölder des modules de Weyl)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}_+^3$ un poids restreint.

(i) Si (a, b, c) est dans l'alcôve supérieure, alors on dispose d'une suite exacte :

$$0 \rightarrow F(a, b, c) \rightarrow \overline{W(a, b, c)} \rightarrow F(z + p - 2, y, x - p + 2) \rightarrow 0.$$

(ii) Si (a, b, c) n'est pas dans l'alcôve supérieure, alors $F(a, b, c) = \overline{W(a, b, c)}$.

Démonstration. On pourra aller voir la proposition 3.18 de [Her09]. □

Comme le théorème précédent, cette proposition est due à Jantzen. Ces deux résultats combinés permettent donc d'obtenir explicitement les composantes de Jordan-Hölder de $\overline{\text{Ind}_{B_3^+(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)}([\cdot]^a \otimes [\cdot]^b \otimes [\cdot]^c)}$, $\overline{\text{Ind}_{P_{(1,2)}^+(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)}([\cdot]^a \otimes R_2([\cdot]^{d_0+pd_1}))}$, et de $\overline{R_3([\cdot]^{e_0+pe_1+p^2e_2})}$.

3.4 Un isomorphisme fondamental

Dans cette partie, nous allons seulement citer un résultat dû à Smith et Cabanes, mais qui sera extrêmement important dans la suite pour définir des opérateurs de Hecke.

Étant donné $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{Z}^3$, on note $P_\mu(\mathbb{F}_p)$ le sous-groupe parabolique de $GL_3(\mathbb{F}_p)$ correspondant, et $L_\mu(\mathbb{F}_p)$ et $N_\mu(\mathbb{F}_p)$ son sous-groupe de Lévi et son sous-groupe normal respectivement. On a alors :

Proposition 3.4.1. (Isomorphisme de représentations du groupe de Lévi)

Soient $V = F(a, b, c)$ un poids de Serre local et $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{Z}^3$ avec $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$. On note $V_{N_\mu(\mathbb{F}_p)} = V/\{nv - v \mid n \in N_\mu(\mathbb{F}_p)\}$. La composée $V^{N_{-\mu}(\mathbb{F}_p)} \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V_{N_\mu(\mathbb{F}_p)}$ est un isomorphisme compatible avec l'action de $L_{-\mu}(\mathbb{F}_p)$ et $V^{N_{-\mu}(\mathbb{F}_p)}$ et $V_{N_\mu(\mathbb{F}_p)}$ sont des représentations irréductibles de $L_{-\mu}(\mathbb{F}_p)$. De plus :

- si $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$, alors $V^{N_{-\mu}(\mathbb{F}_p)} \cong F(a) \otimes F(b) \otimes F(c)$ et $V^{N_{-\mu}(\mathbb{F}_p)}$ est le sous-espace de V sur lequel $T_3(\mathbb{F}_p)$ agit par (a, b, c) .
- si $\mu_1 = \mu_2 < \mu_3$, alors $V^{N_{-\mu}(\mathbb{F}_p)} \cong F(a, b) \otimes F(c)$ et $V^{N_{-\mu}(\mathbb{F}_p)}$ est la somme pour $d \in \mathbb{Z}$ des sous-espaces de V sur lesquels $T_3(\mathbb{F}_p)$ agit par $(a + d, b - d, c)$.
- si $\mu_1 < \mu_2 = \mu_3$, alors $V^{N_{-\mu}(\mathbb{F}_p)} \cong F(a) \otimes F(b, c)$ et $V^{N_{-\mu}(\mathbb{F}_p)}$ est la somme pour $d \in \mathbb{Z}$ des sous-espaces de V sur lesquels $T_3(\mathbb{F}_p)$ agit par $(a, b + d, c - d)$.
- si $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, alors $V^{N_{-\mu}(\mathbb{F}_p)} = F(a, b, c)$.

Démonstration. On pourra aller voir le lemme 2.5 de [Her11b]. □

L'isomorphisme sera utile pour définir une algèbre de Hecke dans la partie 6.3 dont les opérateurs seront les projections modulo p d'opérateurs d'une autre algèbre de Hecke. Les quatre isomorphismes seront utiles dans certains calculs de la partie 7.

3.5 Correspondance de Langlands locale

Considérons K une extension finie de \mathbb{Q}_p de corps résiduel k . Notons $\text{Irr}(GL_n(K))$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles continues admissibles de $GL_n(K)$ sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$, W_K le groupe de Weil de K et $W\text{DRep}_n(W_K)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations de Weil-Deligne telles que le Frobenius agit de manière semi-simple. On définit :

Définition 3.5.1. (Correspondance de Langlands locale)

On appelle **correspondance de Langlands locale** de K une famille de bijections $\text{rec}_K : \text{Irr}(GL_n(K)) \rightarrow W\text{DRep}_n(W_K)$ pour $n \geq 1$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Pour tout $\chi \in \text{Irr}(GL_1(K))$, $\text{rec}_K(\chi) = \chi \circ \text{Art}_K^{-1}$.

(ii) Pour $r_1 \in \text{Irr}(GL_{n_1}(K))$ et $r_2 \in \text{Irr}(GL_{n_2}(K))$, on a :

$$\begin{aligned} L(r_1 \times r_2, s) &= L(\text{rec}_K(r_1) \otimes \text{rec}_K(r_2), s), \\ \epsilon(r_1 \times r_2, s, \psi) &= \epsilon(\text{rec}_K(r_1) \otimes \text{rec}_K(r_2), s, \psi). \end{aligned}$$

(iii) Pour $r \in \text{Irr}(GL_n(K))$ et $\chi \in \text{Irr}(GL_1(K))$,

$$\text{rec}_K(r \otimes (\chi \circ \det)) = \text{rec}_K(r) \otimes \text{rec}_K(\chi).$$

(iv) Pour $r \in \text{Irr}(GL_n(K))$, si χ est le caractère central de r , alors

$$\det \text{rec}_K(r) = \text{rec}_K(\chi).$$

(v) Pour $r \in \text{Irr}(GL_n(K))$, $\text{rec}_K(r^\wedge) = \text{rec}_K(r)^\wedge$, où $^\wedge$ désigne le contragrédient.

Le théorème fondamental que nous utiliserons dans la suite comme boîte noire est le suivant :

Théorème 3.5.2. (Existence et unicité de la correspondance de Langlands locale)

Pour toute extension finie K de \mathbb{Q}_p , il existe une unique correspondance de Langlands locale de K .

L'unicité a été établie par Guy Henniart en 1993 dans [Hen93], et l'existence a été prouvée par Michael Harris et Richard Taylor en 1999 dans [HT01].

Ainsi, à chaque représentation irréductible r de $GL_3(K)$ nous pouvons associer une représentation de Weil-Deligne $\text{rec}_K(r)$. Dans la suite (section 6.2), il conviendra de connaître la restriction à l'inertie de $\text{rec}_K(r)$ pour certaines représentations r :

Proposition 3.5.3. (Correspondance de Langlands inertielle)

Soit r une représentation continue irréductible de $GL_3(K)$ sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$ telle que chaque

vecteur est fixé par un sous-groupe ouvert de $GL_3(K)$ et pour tout sous-groupe ouvert compact U de $GL_3(K)$ le sous-espace fixé par U est de dimension finie (on dit que ρ est admissible). Notons L l'extension non ramifiée de degré 3 de K , et l son corps résiduel.

- (i) Si $r|_{GL_3(\mathcal{O}_K)}$ contient $Ind_{B_3^+(k)}^{GL_3(k)}(\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \chi_3)$ pour χ, χ_2, χ_3 trois caractères $k^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ deux à deux distincts, alors $rec_K(r)|_{I_K} \cong \chi_1 \circ Art_K^{-1} \oplus \chi_2 \circ Art_K^{-1} \oplus \chi_3 \circ Art_K^{-1}$.
- (ii) Si $r|_{GL_3(\mathcal{O}_K)}$ contient $R_3(\chi)$ pour χ un caractère primitif $l^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$, alors $rec_K(r)|_{I_K} \cong \bigoplus_{\sigma \in Gal(l/k)} \sigma(\chi \circ Art_L^{-1})$.

Cette proposition est toujours vraie si l'on remplace 3 par un entier naturel quelconque. Pour une preuve, se référer à la proposition 2.4.1 de [EGH].

4 Représentations automorphes

Fixons un nombre premier p . Rappelons que la conjecture de Serre classique affirme que toute représentation $\rho : Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow GL_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ continue, irréductible et impaire provient d'une forme cuspidale, fonction propre des opérateurs de Hecke, et que nous disposons d'une recette pour connaître le poids et le niveau d'une forme modulaire f telle que $\rho_f \cong \rho$. Nous voulons à présent traiter une généralisation de ce problème en dimension 3, c'est à dire étudier la modularité de représentations continues et irréductibles $\rho : Gal(\overline{F}/F) \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{F}_p})$, où F est un corps de nombres. Bien évidemment, la première étape consiste à expliquer ce que nous entendons par représentation automorphe : il faut donc définir une notion de poids. Nous avons déjà introduit des poids de Serre locaux, que nous pouvons voir comme des représentations de groupes linéaires sur les corps résiduels de certaines complétions de F . Fidèles au principe local-global, nous introduirons une notion de poids de Serre global, qui ne sera qu'un produit tensoriel d'un certain nombre de poids de Serre locaux correspondant à certaines complétions de F et qui jouera le rôle du poids de la forme modulaire dans le cas de la conjecture de Serre en dimension 2. Nous associerons ensuite à chaque représentation irréductible $\rho : G_F \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{F}_p})$ un ensemble de poids de Serre globaux pour lesquels nous dirons que la représentation est automorphe : cet ensemble sera noté $W(\rho)$.

Une fois que nous aurons défini cette notion de modularité, nous introduirons un autre ensemble de poids de Serre globaux $W^?(\rho)$ (que nous appelons l'ensemble des poids prévus), et l'objectif dans toute la suite du mémoire sera de comparer cet ensemble à $W(\rho)$. Toujours fidèles au principe local-global, afin de définir $W^?(\rho)$, nous étudierons préalablement la situation locale, et définirons des ensembles de poids de Serre locaux associés aux restrictions de ρ à certains groupes de décomposition : nous noterons ces ensembles $W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$, w étant une place de F .

Dans toute cette procédure, nous avons tout de même commis une sorte d'imposition vis-à-vis du principe local-global, puisque, s'il est vrai que nous avons défini la notion de poids de Serre global à partir des poids de Serre locaux, nous n'avons pas introduit pour chaque place w de F un ensemble de poids de Serre locaux associé à ρ et à w pour ensuite définir $W(\rho)$. Afin de remédier à cela, nous introduirons de tels ensembles, qui seront des analogues de $W(\rho)$ dans la situation locale, et nous les noterons $W_w(\rho)$, pour w une place de F . L'introduction de ces ensembles sera très utile pour comparer $W(\rho)$ et $W^?(\rho)$, puisque la stratégie consistera à d'abord comparer $W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$ et $W_w(\rho)$ pour en déduire des liens entre $W(\rho)$ et $W^?(\rho)$.

4.1 Contexte général et notations

Considérons F un corps à multiplication complexe, et notons F^+ le sous-corps totalement réel maximal de F . Notons aussi c l'élément non trivial de $Gal(F/F^+)$. Supposons finalement que p est totalement décomposé dans F/\mathbb{Q} . Lorsque v est une place de F^+ , on note k_v le corps résiduel de F_v^+ . Lorsque w est une place de F , on note k_w le corps résiduel de F_w .

Soit maintenant G un groupe algébrique unitaire sur F^+ , compact à l'infini, défini à l'aide d'un espace vectoriel V de dimension 3. Rappelons que l'on dispose d'un isomorphisme de groupes algébriques sur F entre $G \times_{F^+} F$ et GL_3 . Rappelons aussi que, pour toute F^+ -algèbre R ,

$$G(R) = \{g \in GL_3(F \otimes_{F^+} R) : (g^t)J\bar{g} = J\},$$

où J est une matrice hermitienne à coefficients dans F . Par conséquent, si l'on note $g^\sharp = \bar{J}^{-1}(g^t)\bar{J}$ pour $g \in GL_3(F \otimes_{F^+} R)$, alors

$$G(R) = \{g \in GL_3(F \otimes_{F^+} R) : gg^\sharp = Id\}.$$

Cela permet d'établir la proposition suivante, qui sera essentielle dans toute la suite :

Proposition 4.1.1. (*Modèle entier de G*)

Il existe un entier naturel N premier avec p et un groupe algébrique \mathcal{G} sur $\mathcal{O}_{F^+}[1/N]$ tels que $\mathcal{G} \times_{\mathcal{O}_{F^+}[1/N]} F^+ \cong G$ et $\mathcal{G} \times_{\mathcal{O}_{F^+}[1/N]} \mathcal{O}_F[1/N] \cong GL_3$.

Démonstration. On pourra aller voir la section 7.1.1 de [EGH]. □

Notons ι l'isomorphisme $\mathcal{G} \times_{\mathcal{O}_{F^+}[1/N]} \mathcal{O}_F[1/N] \rightarrow GL_3$. Soit v une place finie de F^+ totalement décomposée dans F et ne divisant pas N , et notons w et w^c les places de F qui sont au-dessus de v . On voit alors immédiatement que ι induit un isomorphisme $G(F_w) \rightarrow GL_3(F_w)$, qui par restriction à $\mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_w})$ devient un isomorphisme $\mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_w}) \rightarrow GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$. Or l'injection $F_v^+ \hookrightarrow F_w$ est un isomorphisme.

Donc ι induit un isomorphisme $\iota_w : G(F_v^+) \rightarrow GL_3(F_w)$, qui par restriction à $\mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_v^+})$ devient un isomorphisme $\mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_v^+}) \rightarrow GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$.

Pour terminer, remarquons que, d'après les propriétés des groupes unitaires, $c \circ \iota_w$ est conjugué avec $\phi \circ \iota_{w^c}$, où $\phi : GL_3(F_{w^c}) \rightarrow GL_3(F_w)$, $g \mapsto (g^t)^{-1}$.

4.2 Poids de Serre globaux

Nous avons déjà défini une notion de poids de Serre local : c'est tout simplement une classe d'isomorphisme de représentations irréductibles de $GL_3(\mathbb{F}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$. En fait, comme p est totalement décomposé dans F/\mathbb{Q} , si v est une place de F^+ qui divise p et w est une place de F qui divise v , $k_w = \mathbb{F}_p$, et donc un poids de Serre local est tout simplement une classe d'isomorphisme de représentations irréductibles de $GL_3(k_w)$, ou bien, à l'aide de l'isomorphisme ι_w , une classe d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathcal{G}(k_v)$: cela explique pourquoi nous avons qualifié de "local" un tel poids de Serre. Afin de construire une notion globale de poids de Serre, il est naturel de considérer simultanément des représentations irréductibles des $\mathcal{G}(k_v)$ pour v décrivant les places de F^+ divisant p . Bien évidemment, cela ne correspond pas à l'idée que nous nous faisons d'habitude d'un problème global, puisque nous ne regardons pas toutes les places de F^+ mais seulement celles qui divisent p : cependant, dès le départ, le premier p joue un rôle très particulier (on étudie des représentations en caractéristique p), et il semble donc naturel de ne regarder que les places divisant p pour traiter le problème global, d'autant plus que nous venons de voir que les poids de Serre locaux ne correspondent à des représentations de $\mathcal{G}(k_v)$ que pour des places v de F^+ divisant p . On définit donc :

Définition 4.2.1. (*Poids de Serre globaux*)

Un **poids de Serre global** est par définition une classe d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\prod_{v|p} \mathcal{G}(k_v)$.

Grâce à l'isomorphisme ι , si pour chaque place v de F^+ divisant p on fixe une place \tilde{v} de F divisant v , on peut toujours voir un poids de Serre comme une classe d'isomorphisme d'une représentation irréductible du produit $\prod_{v|p} GL_3(k_{\tilde{v}})$. Or, d'après la théorie des représentations linéaires des groupes finis, les représentations irréductibles de $\prod_{v|p} GL_3(k_{\tilde{v}})$ sont les produits tensoriels de représentations irréductibles des $GL_3(k_{\tilde{v}})$. De plus, comme p est totalement décomposé dans F/\mathbb{Q} , $k_{\tilde{v}} = \mathbb{F}_p$ pour tout \tilde{v} . Par conséquent, les poids de Serre globaux sont les :

$$\bigotimes_v F(a_v, b_v, c_v)$$

où les (a_v, b_v, c_v) sont des poids restreints locaux pour toute place v de F^+ divisant p .

Paramétrons ces poids de Serre globaux de la manière suivante. Remarquons que la conjugaison complexe c induit une permutation de l'ensemble \mathcal{P}_p^F des places de F divisant p , en envoyant chaque place w sur l'autre place w^c qui est au-dessus de $w|_{F^+}$. Soit $(\mathbb{Z}_+^3)_0^{\mathcal{P}_p^F}$ l'ensemble des $a \in (\mathbb{Z}_+^3)^{\mathcal{P}_p^F}$ tels que, pour toute place w de F divisant p et pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $a_{w,i} + a_{w^c,4-i} = 0$. Cette dernière égalité permettra en fait dans la suite d'effacer le choix arbitraire des \tilde{v} que nous avons effectué précédemment. On dit qu'un élément de $a \in (\mathbb{Z}_+^3)_0^{\mathcal{P}_p^F}$ est un **poids restreint global** si pour toute place w de F divisant p et pour tout $i \in \{1, 2\}$, on a $a_{w,i} - a_{w,i+1} \leq p - 1$. Cela rappelle bien évidemment la définition des poids restreints locaux.

Donnons-nous maintenant un poids restreint global a . Pour chaque place w de F divisant p , nous disposons d'un poids restreint local a_w , et donc d'un poids de Serre local F_{a_w} . Si l'on note $v = w|_{F^+}$, on peut voir F_{a_w} comme une représentation irréductible de $\mathcal{G}(k_v)$ à l'aide de l'isomorphisme $\mathcal{G}(k_v) \cong GL_3(k_w)$. On remarque alors que, F_{a_w} et $F_{a_{w^c}}$ sont deux représentations isomorphes de $\mathcal{G}(k_v)$, puisque $a_{w,i} + a_{w^c,4-i} = 0$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $c \circ \iota_w$ est conjugué à l'inverse de la transposée de ι_{w^c} . Par conséquent, la représentation F_{a_w} de $\mathcal{G}(k_v)$ dépend uniquement de $v = w|_{F^+}$ et non de w . On la notera donc F_{a_v} dans la suite.

On définit finalement le poids de Serre global $F_a = \bigotimes_{v|p} F_{a_v}$. D'après ce que nous avons vu jusqu'ici, les poids de Serre globaux sont les F_a pour a un poids restreint global. On dira alors qu'un poids de Serre global F_a est **générique** (resp. **fortement générique**) lorsque tous les F_{a_v} sont génériques (resp. fortement génériques).

Dans la suite, il sera aussi utile d'adopter un autre point de vue : un poids de Serre global peut être vu comme une classe d'isomorphisme d'une représentation irréductible de $\prod_{v|p} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_v^+})$ grâce à la surjection $\prod_{v|p} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_v^+}) \twoheadrightarrow \prod_{v|p} \mathcal{G}(k_v)$.

4.3 L'ensemble des poids associés à une représentation

Afin de définir une notion de représentation automorphe, il nous faut introduire un espace de formes automorphes muni d'une famille d'opérateurs de Hecke.

Étant donné un $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -module W muni d'une action de $\prod_{v|p} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_v^+})$ et un sous-groupe ouvert compact U de $G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty,p}) \times \prod_{v|p} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_v^+})$, une **forme automorphe sur G de niveau U à coefficients dans W** est par définition une fonction $f : G(F^+) \backslash G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty,p}) \rightarrow W$ telle que, pour $g \in G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty,p})$ et $u \in U$, $f(gu) = u_p^{-1} f(g)$, où u_p désigne la projection de u sur $\prod_{v|p} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_v^+})$. On notera $S(U, W)$ l'espace des formes automorphes sur G de niveau U à coefficients dans W . On notera aussi $S_{lim}(W) = \varinjlim_U S(U, W)$. On remarque que $G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty,p})$ agit sur $S_{lim}(W)$ par $g \cdot f(h) = g_p f(hg)$.

Nous avons ainsi défini notre espace de formes automorphes. Reste à introduire des

opérateurs de Hecke. On dit qu'un sous-groupe ouvert et compact U de $G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty,p}) \times \prod_{v|p} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_v^+})$ est **non ramifié en une place v de F^+** qui est totalement décomposée dans F/F^+ et qui ne divise pas N si $U = \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_v^+}) \times U^v$, où U^v est un sous-groupe ouvert et compact de $G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty,p,v}) \times \prod_{v'|p, v' \neq v} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_{v'}^+})$, et on dit que U est **non ramifié en p** s'il est non ramifié en toute place v de F^+ divisant p . En tenant compte de la topologie du produit restreint, il est évident que U est non ramifié en presque toutes les places v de F^+ totalement décomposées sur F .

Pour U un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty,p}) \times \prod_{v|p} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_v^+})$, on note \mathcal{P}_U l'ensemble des places finies w de F totalement décomposées dans F/F^+ , ne divisant pas pN et telles que U est non ramifié en $w|_{F^+}$, puis on considère \mathcal{P} une partie cofinie de \mathcal{P}_U . Soit alors $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ l'algèbre de polynômes $\overline{\mathbb{Z}}_p \left[T_w^{(j)} : w \in \mathcal{P}, j \in \{1, 2, 3\} \right]$. Cette algèbre agit sur $S(U, W)$ à travers les opérateurs de Hecke :

$$T_w^{(1)} = \iota_w^{-1} \left[GL_3(\mathcal{O}_{F_w}) \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} GL_3(\mathcal{O}_{F_w}) \right],$$

$$T_w^{(2)} = \iota_w^{-1} \left[GL_3(\mathcal{O}_{F_w}) \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} GL_3(\mathcal{O}_{F_w}) \right],$$

$$T_w^{(3)} = \iota_w^{-1} \left[GL_3(\mathcal{O}_{F_w}) \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} GL_3(\mathcal{O}_{F_w}) \right],$$

où π est une uniformisante de \mathcal{O}_{F_w} . De cette manière, nous avons défini une algèbre de Hecke $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ qui agit sur l'espace des formes automorphes $S(U, W)$.

Remarque 4.3.1. *On vérifie immédiatement que $T_w^{(1)} T_w^{(3)} = T_w^{(2)}$ et $T_w^{(2)} T_w^{(3)} = T_w^{(1)}$.*

Donnons-nous maintenant une représentation continue irréductible $\rho : G_F \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Soit F_a un poids de Serre global (vu comme représentation de $\prod_{v|p} \mathcal{G}(k_v)$), a étant un poids restreint global. Nous voulons définir ce que signifie pour ρ d'être automorphe de poids F_a . Par analogie avec la conjecture de Serre en dimension 2, il semble naturel de chercher certains espaces propres des opérateurs de Hecke précédents dans $S(U, W)$, pour certaines valeurs propres déterminées par ρ .

Supposons que $\rho|_{F_w}$ soit non ramifiée pour toute place $w \in \mathcal{P}$. Sous cette hypothèse, le polynôme caractéristique de $\rho(Frob_w)$ est bien défini pour $w \in \mathcal{P}$: notons-le

$$X^3 - t_w^{(1)} X^2 + t_w^{(2)} X - t_w^{(3)}.$$

Considérons alors le morphisme de $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -algèbres suivant :

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{T}^{\mathcal{P}} &\rightarrow \overline{\mathbb{F}_p} \\ T_w^{(j)} &\mapsto \frac{t_w^{(j)}}{(N_w)^{j(j-1)/2}} \end{aligned}$$

où N_w désigne la norme de w . Ce morphisme d'algèbres est surjectif, et donc son noyau est un idéal maximal de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$, que nous noterons \mathfrak{m} . Dire que l'espace propre de $S(U, F_a)$ (pour un certain sous-groupe ouvert compact U de $G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty, p}) \times \prod_{v|p} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_v^+})$) sous l'action de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ pour les valeurs propres déterminées par le caractère θ est non nul revient alors à dire que $S(U, F_a)_{\mathfrak{m}} \neq 0$. On définit donc :

Définition 4.3.2. (Représentations automorphes)

Soient $\rho : G_F \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{F}_p})$ une représentation continue irréductible et F_a un poids de Serre global, a étant un poids restreint global. On dit que ρ est **automorphe de poids** F_a s'il existe un sous-groupe ouvert compact U de $G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty, p}) \times \prod_{v|p} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_v^+})$ non ramifié en p et une partie cofinie \mathcal{P} de \mathcal{P}_U ne contenant que des places où ρ est non ramifiée tels que, si \mathfrak{m} désigne l'idéal maximal de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ associé à la représentation ρ , on a $S(U, F_a)_{\mathfrak{m}} \neq 0$. On note $W(\rho)$ l'ensemble des poids de Serre globaux pour lesquels ρ est automorphe. On note aussi $W_{gen}(\rho)$ l'ensemble des poids de Serre globaux génériques de $W(\rho)$.

Comme dans le cas de la conjecture de Serre en dimension 2, cette définition soulève trois problèmes :

- (i) (*Modularité*) Quelles représentations ρ sont automorphes (i.e. $W(\rho) \neq \emptyset$) ?
- (ii) (*Problème du poids*) Si ρ est automorphe, peut-on déterminer pour quels poids elle l'est (i.e. déterminer l'ensemble $W(\rho)$) ?
- (iii) (*Problème du niveau*) Si ρ est automorphe, peut-on déterminer (explicitement) un sous-groupe ouvert compact U de $G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty, p}) \times \prod_{v|p} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_v^+})$ pour lequel il existe une partie cofinie \mathcal{P} de \mathcal{P}_U ne contenant que des places où ρ est non ramifiée telle que, si \mathfrak{m} désigne l'idéal maximal de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ associé à la représentation ρ , on a $S(U, F_a)_{\mathfrak{m}} \neq 0$?

Dans toute la suite, on ne s'intéresse qu'au deuxième problème.

4.4 L'ensemble des poids prévus

Dans cette section, étant donnée une représentation galoisienne $\rho : Gal(\overline{F}/F) \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{F}_p})$, nous allons définir un ensemble de poids de Serre globaux $W^?(\rho)$. Nous dirons que c'est l'ensemble des poids prévus, puisque nous tenterons de montrer, dans la suite, que $W^?(\rho)$ est en fait l'ensemble des poids pour lesquels ρ est automorphe. La référence pour construire l'ensemble $W^?(\rho)$ est la thèse de Florian Herzig. Nous choisissons ici de donner une définition moins intrinsèque de $W^?(\rho)$,

mais plus explicite.

Considérons $\rho : Gal(\overline{F}/F) \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{F}}_p)$ une représentation continue modérément ramifiée en p . Dans un premier temps, nous allons fixer w une place de F au-dessus de p , et nous allons introduire un ensemble de poids de Serre locaux $W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$, dépendant uniquement de la restriction de ρ au groupe de décomposition G_{F_w} , qui nous permettra ensuite de définir l'ensemble de poids de Serre globaux $W^?(\rho)$. Rappelons que, comme p est totalement décomposé dans F , $F_w = \mathbb{Q}_p$, et donc $G_{F_w} = Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$.

Notons $I_p = Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{nr})$ le groupe d'inertie en p et $I_t = Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{nr})$ le groupe de ramification sauvage, l'unique p -Sylow de I_p . Comme ρ est modérément ramifiée, ρ induit une représentation continue du groupe abélien I_p/I_t . Par conséquent, la représentation $\rho|_{I_p}$ est une somme directe de trois caractères, disons χ_1, χ_2 et χ_3 . La puissance p -ième permute χ_1, χ_2, χ_3 , et donc trois cas se présentent :

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad \rho|_{I_p} &\cong \begin{pmatrix} \omega_1^a & & \\ & \omega_1^b & \\ & & \omega_1^c \end{pmatrix}, \text{ pour } a, b, c \in \mathbb{Z}. \\ \text{(B)} \quad \rho|_{I_p} &\cong \begin{pmatrix} \omega_1^a & & \\ & \omega_2^d & \\ & & \omega_2^{pd} \end{pmatrix}, \text{ pour } a, d \in \mathbb{Z} \text{ et } d \text{ non multiple de } p+1. \\ \text{(C)} \quad \rho|_{I_p} &\cong \begin{pmatrix} \omega_3^e & & \\ & \omega_3^{pe} & \\ & & \omega_3^{p^2e} \end{pmatrix}, \text{ pour } e \text{ non multiple de } p^2 + p + 1. \end{aligned}$$

Remarque 4.4.1. (La notation τ)

Pour alléger les notations dans la suite, on notera

$$\tau(\xi, (a_1, a_2, a_3)) = \omega_3^{a_1 + a_{\xi(1)}p + a_{\xi(\xi(1))}p^2} \oplus \omega_3^{a_{\xi(\xi(1))} + a_{1p} + a_{\xi(1)}p^2} \oplus \omega_3^{a_{\xi(1)} + a_{\xi(\xi(1))}p + a_{1p}p^2}$$

pour $\xi \in \mathcal{S}_3$ et $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}^3$. On prouve facilement que, si a, b, c, x, y, z sont des entiers tels que $a > b > c, x > y > z, a - c \leq p, x - y \leq p$ et $a + b + c = x + y + z$, si ξ et ξ' sont des 3-cycles dans \mathcal{S}_3 tels que $\tau(\xi, (a, b, c)) \cong \tau(\xi', (x, y, z))$, alors $\xi = \xi'$ et $(a, b, c) = (x, y, z)$ (voir le lemme 5.2.3 de [EGH]).

Selon le cas, on associe à ρ la représentation de $GL_3(\mathbb{F}_p)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ suivante :

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad V(\rho|_{I_p}) &= Ind_{B_3(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)}([\cdot]^a \otimes [\cdot]^b \otimes [\cdot]^c). \\ \text{(B)} \quad V(\rho|_{I_p}) &= Ind_{P_{(1,2)}^+(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)}([\cdot]^a \otimes R_2([\cdot]^d)). \\ \text{(C)} \quad V(\rho|_{I_p}) &= R_3([\cdot]^e). \end{aligned}$$

Remarquons qu'ici, $[\cdot]^a, [\cdot]^b$ et $[\cdot]^c$ sont vus comme des caractères de \mathbb{F}_p^\times , $[\cdot]^d$ comme caractère de $\mathbb{F}_{p^2}^\times$ et $[\cdot]^e$ comme caractère de $\mathbb{F}_{p^3}^\times$. Nous sommes maintenant en mesure de définir l'ensemble des poids locaux prévus :

Définition 4.4.2. (Ensemble des poids locaux prévus)

On appelle **ensemble des poids locaux prévus de ρ** l'ensemble $\mathcal{R}(\overline{JH(V(\rho|_{I_p}))})$, où $\overline{V(\rho|_{I_p})}$ désigne la réduction d'un réseau stable par I_p de $V(\rho|_{I_p})$ modulo l'idéal maximal de $\overline{\mathbb{Z}_p}$, et $JH(\overline{V(\rho|_{I_p})})$ les composantes de Jordan-Hölder de $\overline{V(\rho|_{I_p})}$. On le note $W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$.

Maintenant que nous avons défini l'ensemble des poids locaux prévus, nous voudrions avoir une description plus explicite de cet ensemble. Pour ce faire, identifions le groupe de Weyl W_3 de GL_3 avec \mathcal{S}_3 , et définissons :

Définition 4.4.3. Soit $(w, \mu) \in W_3 \times X^*(T_3)$. Notons $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$. On dit que le couple (w, μ) est **bon** si w est un 3-cycle et si, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on a $p^2 + p + 1 \nmid \mu_i + p\mu_{w(i)} + p^2\mu_{w^2(i)}$.

Rappelons que, si $F(a, b, c)$ est un poids de Serre dans l'alcôve inférieure, alors $F(c + p - 2, b, a - p + 2)$ est un poids de Serre dans l'alcôve supérieure noté $R(F)$. Pour décrire explicitement l'ensemble des poids locaux prévus, il nous faut encore définir les deux ensembles suivants :

Définition 4.4.4. (Les ensembles $\mathcal{A}(a, b, c)$ et $\mathcal{C}(\rho)$)

(i) Soit (a, b, c) un poids restreint local. Notons $F = F(a - 2, b - 1, c)_{reg}$. On appelle $\mathcal{A}(a, b, c)$ l'ensemble de poids de Serre locaux $\{F, R(F)\}$ si F est dans l'alcôve inférieure, l'ensemble $\{F\}$ sinon.

(ii) On appelle $\mathcal{C}(\rho)$ l'ensemble des poids restreints locaux μ tels qu'il existe $w \in W_3$ vérifiant que (w, μ) est bon et $\rho|_{I_p} \cong \tau(w, \mu)$.

Nous pouvons maintenant rendre la définition de $W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$ nettement plus explicite à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 4.4.5. (Description explicite de $W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$)

L'ensemble des poids locaux prévus est

$$W_w^?(\rho|_{G_{F_w}}) = \bigcup_{\mu \in \mathcal{C}(\rho)} \mathcal{A}(\mu).$$

Pour expliciter encore plus cet ensemble, il sera bien sûr utile dans la suite de disposer d'une description détaillée de l'ensemble $\mathcal{C}(\rho)$:

Proposition 4.4.6. (L'ensemble $\mathcal{C}(\rho)$)

Notons $X_1(T_3) = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}_+^3 / a - b \leq p - 1, b - c \leq p - 1\}$.

(A) Dans le cas (A), si $p - 1 \geq a \geq b \geq c \geq 0$, on a

$$\mathcal{C}(\rho) = \{(a, b, c), (b, c, a - p + 1), (c + p - 1, a, b), (c + p - 1, b, a - p + 1), (a, c, b - p + 1), (b + p - 1, a, c)\} + (p - 1)\mathbb{Z}(1, 1, 1).$$

(B) Dans le cas (B), écrivons $d = d_0 + pd_1$ et supposons que $a \geq d_0 > d_1$ et $a - d_1 \leq p - 1$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\rho) = & (\{(a, d_0, d_1), (d_0, d_1, a - p + 1), (d_1 + p, a, d_0 - 1), \\ & (d_1 + p, d_0 - 1, a - p + 1), (a, d_1 + 1, d_0 - p), (d_0 + p, a, d_1 - 1), \\ & (a + p - 1, d_0, d_1), (d_0, d_1, a - 2p + 2)\} \cap X_1(T_3)) + (p - 1)\mathbb{Z}(1, 1, 1). \end{aligned}$$

(C) Dans le cas (C), écrivons $e = e_0 + e_1p + e_2p^2$ et supposons que $e_0 > e_1 \geq e_2$ et $e_0 - e_2 \leq p$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\rho) = & (\{(e_0, e_1, e_2), (e_1 + 1, e_2, e_0 - p), (e_2 + p, e_0 - 1, e_1), \\ & (e_2 + p, e_1 + 1, e_0 - p - 1), (e_0, e_2 + 1, e_1 - p), (e_1 + p, e_0, e_2 - 1)\} \\ & \cap X_1(T_3)) + (p - 1)\mathbb{Z}(1, 1, 1). \end{aligned}$$

Les deux propositions précédentes nous permettront dans la suite de déterminer quels sont exactement les poids de Serre locaux prévus. Maintenant que nous avons défini l'ensemble $W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$, nous sommes en mesure de passer au problème global, c'est-à-dire d'introduire l'ensemble de poids de Serre globaux $W^?(\rho)$:

Définition 4.4.7. (Ensemble des poids globaux prévus)

L'ensemble des poids globaux prévus $W^?(\rho)$ est, par définition, l'ensemble de poids de Serre globaux de la forme $\bigotimes_{v|p} V_v$, où V_v est une représentation de $\mathcal{G}(k_v)$ telle que $V_v \circ \iota_w^{-1} \in W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$ pour toute place v de F^+ divisant p et toute place w de F divisant v .

Comme nous l'avons déjà annoncé, l'objectif de ce mémoire consiste à comparer les ensembles $W(\rho)$ et $W^?(\rho)$. Cela est intéressant puisque l'ensemble $W(\rho)$ est a priori difficile à calculer, alors que les propositions précédentes fournissent une méthode simple pour calculer $W^?(\rho)$.

4.5 Ensemble des poids locaux associés à une représentation

Jusqu'ici, nous avons construit des ensembles $W(\rho)$, $W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$ et $W^?(\rho)$. Comme nous l'avons expliqué au début de cette partie, au nom du principe local-global, il convient de définir pour certaines places w de F des ensembles $W_w(\rho)$ contenant des poids de Serre locaux associés à ρ et à w , et qui joueraient un rôle analogue à $W(\rho)$ dans le contexte local.

Supposons que ρ soit automorphe de poids F_a , a étant un poids restreint global, et fixons une place w de F divisant p . Notons $v = w|_{F^+}$. Par définition, il existe un sous-groupe ouvert compact U de $G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty, p}) \times \prod_{v'|p} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_v^+})$ non ramifié en p et une partie cofinie \mathcal{P} de \mathcal{P}_U ne contenant que des places où ρ est non ramifiée

tels que, si \mathfrak{m} désigne l'idéal maximal de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ associé à la représentation ρ , on a $S(U, F_a)_{\mathfrak{m}} \neq 0$. Comme U est non ramifié en p , on peut écrire $U = \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_v^+}) \times U^v$, où U^v est un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty, p}) \times \prod_{v' | p, v' \neq v} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_{v'}^+})$.

Étant donné un $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -module W muni d'une action de $\prod_{v' | p} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_{v'}^+})$ telle que $\mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_v^+})$ agit trivialement, on appelle $S(U^v, W)$ l'espace des fonctions $f : G(F^+) \backslash G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty}) \rightarrow W$ telles que, pour $g \in G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty})$ et $u \in U^v$, $f(gu) = u_p^{-1} f(g)$, où u_p désigne la projection de u sur $\prod_{v' | p, v' \neq v} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_{v'}^+})$. Le groupe $G(F_v^+)$ agit sur $S(U^v, W)$ par $(\gamma f)(g) = f(g\gamma)$ pour $\gamma \in G(F_v^+)$ et $g \in G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty})$. Par conséquent, $S(U^v, W)$ est une représentation de $G(F_v^+)$, mais cette représentation n'est pas continue. Soit $S^{sm}(U^v, W)$ la plus grande sous-représentation continue de $S(U^v, W)$. En d'autres mots :

$$S^{sm}(U^v, W) = \bigcup_{U'} S(U^v, W)^{U'}$$

où la réunion est prise sur les sous-groupes ouverts U' de U^v . De cette manière, nous disposons d'une représentation continue de $G(F_v^+)$, ou de $GL_3(F_w)$ à travers l'isomorphisme ι_w . De plus, l'algèbre $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ agit sur $S(U^v, W)$ à travers les opérateurs de Hecke définis précédemment, et $S^{sm}(U^v, W)$ est stable sous cette action. Par conséquent, $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ agit sur $S^{sm}(U^v, W)$, et cette action commute avec l'action de $GL_3(F_w)$.

Prenons maintenant $W = \bigotimes_{v' \neq v} F_{a_{v'}}$, et posons :

$$S = S^{sm} \left(U^v, \bigotimes_{v' \neq v} F_{a_{v'}} \right).$$

C'est un $\overline{\mathbb{F}_p}$ -module. Pour V un poids de Serre local que l'on voit comme représentation de $GL_3(k_w)$, on pose :

$$S(V) = (V \otimes_{\overline{\mathbb{F}_p}} S)^{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})}.$$

Le $\overline{\mathbb{F}_p}$ -espace vectoriel $S(V)$ est alors naturellement muni d'une action de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$. On notera $W_w(\rho)$ (resp. $W_{gen, w}(\rho)$) l'ensemble des poids de Serre locaux (resp. l'ensemble des poids de Serre locaux génériques) pour lesquels $S(V)_{\mathfrak{m}} \neq 0$.

Remarque 4.5.1. (Attention !)

- (i) Contrairement à $W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$, l'ensemble $W_w(\rho)$ ne dépend pas que de $\rho|_{G_{F_w}}$.
- (ii) L'ensemble $W_w(\rho)$ dépend de ρ et de w mais aussi du choix d'un poids de Serre global pour lequel ρ est automorphe.

Comme nous l'avons déjà dit, la stratégie pour comparer les ensembles $W(\rho)$ et $W^?(\rho)$ consistera à comparer préalablement les ensembles $W_w(\rho)$ et $W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$.

5 Quelques rappels de théorie de Hodge p -adique

Dans cette partie, nous allons présenter quelques aspects de la théorie de Hodge p -adique dont nous aurons besoin dans la suite. Nous ne donnerons pas de preuves des résultats, puisque ce n'est pas l'objectif de ce mémoire et cela serait beaucoup trop long. Les références principales dans cette partie sont [BC] et [FO]. Nous utilisons aussi [BM02], [Bre02], [FL82] et [EGH].

Tout d'abord, nous tentons de trouver des critères pour classifier des représentations galoisiennes sur \mathbb{Q}_p . Dans les parties 1 et 2, nous expliquons la construction de l'anneau des vecteurs de Witt et la construction d'un anneau de caractéristique p parfait. Ces deux constructions seront utilisées de manière répétée dans la suite. Ensuite, dans la section 3, nous décrivons le cadre abstrait général qui va permettre de classifier les représentations. Dans les sections 4 à 7, nous définissons quatre grandes classes de représentations galoisiennes : les représentations de Hodge-Tate, les représentations de de Rham, les représentations cristallines puis les représentations semi-stables. Cela est toujours effectué de la même manière : nous construisons un certain anneau particulier et nous appliquons la théorie générale de la partie 3 à cet anneau.

Ensuite, nous cherchons à étudier les catégories de représentations ainsi définies : en particulier, nous nous intéressons à la catégorie des représentations cristallines et à celle des représentations semi-stables, parce que ces deux catégories se comportent particulièrement bien. En effet, dans la partie 8, on voit qu'elles sont équivalentes à des catégories relevant de l'algèbre linéaire ou semi-linéaire (des catégories d'espaces vectoriels munis d'applications semi-linéaires et de filtrations avec certaines relations de compatibilité).

Dans la partie 9, nous traitons un cas très particulier des études précédentes : le cas de la dimension 1, c'est-à-dire le cas des caractères. En particulier, nous donnons un critère pour qu'un caractère soit semi-stable ou cristallin.

La partie 10 permet de définir une nouvelle classe de représentations, en introduisant une version relative de la semi-stabilité, à savoir la potentielle semi-stabilité. Après, les parties 11 et 12 sont consacrées à expliquer comment la théorie se généralise à des représentations sur une extension de \mathbb{Q}_p . Dans la partie 11, on se penche plutôt sur les poids de Hodge-Tate, alors que dans la partie 12, on s'intéresse aux structures linéaires associées à une représentation semi-stable. On voit en particulier que ces structures sont les mêmes que celles dans le cas des représentations sur \mathbb{Q}_p mais munies en plus d'une action du groupe de Galois de l'extension de \mathbb{Q}_p considérée.

Dans la suite du mémoire, nous aurons besoin d'étudier des réseaux stables dans les représentations cristallines ou semi-stables puis de quotienter de tels réseaux. Il sera donc utile de comprendre quelles sont les structures linéaires correspondantes : cela fera l'objet des sections 13 (théorie de Fontaine-Laffaille pour les représenta-

tions cristallines) et 14 (théorie de Breuil pour les représentations potentiellement semi-stables).

Finalement, la section 15 définit la représentation de Weil-Deligne associée à une représentation semi-stable, puis dans la section 16, on prouve que si l'on connaît le type d'inertie d'une représentation potentiellement semi-stable dont on contrôle les poids de Hodge-Tate, alors on connaît (à un nombre fini de possibilités près) la restriction à l'inertie de la représentation (théorème 5.16.1), résultat qui jouera un rôle essentiel par la suite.

5.1 L'anneau des vecteurs de Witt

Références : [FO, sections 0.2.2 et 0.2.3] et [BC, section 4.2].

Fixons un anneau A . Nous rappelons ici la construction de l'anneau des vecteurs de Witt, qui est à la base de toute la suite.

Définition 5.1.1. Polynômes de Witt

On appelle n -ième polynôme de Witt le polynôme

$$W_n(X_0, \dots, X_n) = X_0^{p^n} + pX_1^{p^{n-1}} + p^2X_2^{p^{n-2}} + \dots + p^nX_n \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n].$$

Notons $\underline{X} = X_0, X_1, X_2, \dots$ et $\underline{Y} = Y_0, Y_1, Y_2, \dots$. Le lemme suivant est technique mais fondamental :

Lemme 5.1.2. *Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{Z}[X, Y]$, il existe une suite unique de polynômes (Q_n) dans $\mathbb{Z}[\underline{X}; \underline{Y}]$ tels que*

$$Q(W_n(X_0, \dots, X_n), W_n(Y_0, \dots, Y_n)) = W_n(Q_0(\underline{X}, \underline{Y}), Q_1(\underline{X}, \underline{Y}), \dots, Q_n(\underline{X}, \underline{Y})).$$

De plus, $Q_n \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n]$.

Considérons les polynômes $S = X + Y$ et $P = XY$, et notons (S_n) et (P_n) les suites qui leur sont associées. Posons $W_n(A) = A^n$ en tant qu'ensemble, et munissons $W_n(A)$ d'une structure d'anneau : pour $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ et $b = (b_0, \dots, b_{n-1})$, on pose $a + b = (S_0(a_0, b_0), S_1(a_0, a_1, b_0, b_1), \dots, S_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1}))$, et $ab = (P_0(a_0, b_0), P_1(a_0, a_1, b_0, b_1), \dots, P_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1}))$.

Définition 5.1.3. Vecteurs de Witt de longueur n

L'anneau $W_n(A)$ est appelé **anneau des vecteurs de Witt de longueur n** . C'est un anneau intègre.

Exemple 5.1.4. (i) On trouve facilement que $S_0 = X_0 + Y_0$, $P_0 = X_0Y_0$, $S_1 = X_1 + Y_1 + \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i X_0^i Y_0^{p-i}$ et $P_1 = Y_1X_0^p + X_1Y_0^p + pX_1Y_1$. On vérifie facilement que $(x, 0, 0, \dots)(y, 0, 0, \dots) = (xy, 0, 0, \dots)$ pour $x, y \in A$. Par contre, il est en général faux que $(x, 0, 0, \dots) + (y, 0, 0, \dots) = (x + y, 0, 0, \dots)$.

(ii) Si A est de caractéristique p , alors $p(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0^p, x_1^p, \dots)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on dispose d'un morphisme d'anneaux surjectif $W_{n+1}(A) \rightarrow W_n(A)$, $(a_0, \dots, a_n) \mapsto (a_0, \dots, a_{n-1})$, permettant de définir :

Définition 5.1.5. Anneau des vecteurs de Witt

On appelle $\varprojlim W_n(A)$ l'**anneau des vecteurs de Witt**, et on le note $W(A)$. Muni de la topologie limite projective, c'est un anneau topologique.

La construction de l'anneau des vecteurs de Witt est particulièrement intéressante lorsque A est une \mathbb{F}_p -algèbre parfaite. En effet, dans ce cas, la multiplication par p dans $W(A)$ est donnée par $(a_0, a_1, \dots) \mapsto (0, a_0^p, a_1^p, \dots)$. Par conséquent, elle est injective, on a un isomorphisme $W(A)/p^n W(A) \cong W_n(A)$, et donc $W(A) \cong \varprojlim W(A)/p^n W(A)$. On en déduit que $W(A)$ est un anneau séparé et complet pour la topologie p -adique. De plus, $W(A)/pW(A) \cong A$ est une \mathbb{F}_p -algèbre parfaite. On dit alors que $W(A)$ est un **p -anneau strict** (c'est-à-dire un anneau B séparé et complet pour la topologie p -adique tel que B/p est une \mathbb{F}_p -algèbre parfaite). Grâce à cette observation, on peut montrer le lemme suivant :

Lemme 5.1.6. (Représentants de Teichmüller)

Soit A une \mathbb{F}_p -algèbre parfaite. Il existe une unique section ensembliste $[\cdot] : W(A)/pW(A) \rightarrow W(A)$ de la projection naturelle $W(A) \rightarrow W(A)/pW(A)$ telle que $[x^p] = [x]^p$ pour $x \in W(A)/pW(A)$. De plus, $[\cdot]$ est multiplicative et vérifie $[1] = 1$.

Pour définir explicitement l'application $[\cdot]$, considérons $x \in W(A)/pW(A)$ et notons $y_n \in W(A)$ un relèvement de $x^{p^{-n}}$. On a alors : $[x] = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{p^n}$. On appelle $[x]$ le **représentant de Teichmüller** de x . Il est alors immédiat que tout élément de $W(A)$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{n \geq 0} [b_n] p^n$ avec $b_n \in W(A)/pW(A)$.

Exemple 5.1.7. Nous verrons dans la suite que $W(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}_p$. Dans \mathbb{F}_p , le polynôme $P = X^p - X$ est scindé à racines simples. De plus, tout élément de \mathbb{F}_p est racine de P . Par conséquent, en appliquant le lemme de Hensel, pour tout $x \in \mathbb{F}_p$, il existe un unique $[x] \in \mathbb{Z}_p$ qui relève x et qui vérifie $[x]^p = [x]$. Ce n'est autre que le représentant de Teichmüller défini précédemment.

Il est en fait possible de déterminer exactement quels sont les anneaux qui sont de la forme $W(A)$ pour A une \mathbb{F}_p -algèbre parfaite :

Proposition 5.1.8. (p -anneaux stricts)

Les p -anneaux stricts sont exactement les anneaux de la forme $W(A)$ pour A une \mathbb{F}_p -algèbre parfaite.

L'idée pour établir la propriété précédente consiste à montrer que, si B est un p -anneau strict, alors B et $W(B/pB)$ vérifient la même propriété universelle dans une catégorie appelée *catégorie des p -anneaux*, et donc le lemme de Yoneda permet de conclure $B \cong W(B/pB)$.

Nous allons maintenant donner une conséquence importante des considérations précédentes dans le cadre des corps p -adiques. Considérons K un corps p -adique de corps résiduel k . Dans ce cas, l'anneau des vecteurs de Witt permet de retrouver la sous-extension maximale non ramifiée :

Théorème 5.1.9. (Vecteurs de Witt et corps p -adiques)

Avec les notations précédentes, l'anneau $W(k)$ est l'anneau des entiers de la sous-extension maximale non ramifiée de K .

Exemple 5.1.10. *Comme nous l'avons déjà annoncé précédemment, $W(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}_p$.*

Nous avons rappelé toutes les propriétés importantes dont nous aurons besoin concernant l'anneau des vecteurs de Witt. Il s'agit maintenant de construire l'anneau A de caractéristique p parfait auquel nous allons appliquer cette construction.

5.2 L'anneau R

Références : [FO, section 4.1] et [BC, sections 4.2 et 4.3].

Soit A un anneau commutatif. On définit alors un anneau parfait de caractéristique p :

Définition 5.2.1. L'anneau $R(A)$

L'anneau $R(A)$ est défini comme la limite projective $\varprojlim A_n$, où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = A/p^n A$ et les flèches de transition sont données par $A_{n+1} \rightarrow A_n, x \mapsto x^p$. Muni de la topologie limite projective, $R(A)$ est un anneau topologique de caractéristique p .

Ainsi, un élément de $R(A)$ est une suite d'éléments de $A/p^n A$. On voudrait relever cette suite en une suite d'éléments de A . Pour ce faire, il nous faut faire d'avantage d'hypothèses concernant la topologie p -adique de A :

Proposition 5.2.2. (Autre description de $R(A)$)

Supposons que A soit séparé et complet pour la topologie p -adique, c'est-à-dire que $A \rightarrow \varprojlim A/p^n A$ est un isomorphisme d'anneaux. Considérons l'anneau $S = \{(x^{(n)})_{n \geq 0} : x^{(n)} \in A, (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}\}$ muni de l'addition $(x+y)^{(n)} = \lim_{m \rightarrow \infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m}$ et de la multiplication $(xy)^{(n)} = x^{(n)}y^{(n)}$. La réduction modulo p est alors un isomorphisme d'anneaux $S \rightarrow R(A)$.

On peut en fait décrire explicitement le morphisme inverse :

Remarque 5.2.3. (Morphisme inverse)

Soit $(x_n)_n \in R(A)$. Pour tout n , considérons $y_n \in A$ un relèvement de $x_n \in A/pA$. Le morphisme $R(A) \rightarrow S$ défini par $(x_n)_n \mapsto (x^{(n)})_n$ où $x^{(n)} = \lim_{m \rightarrow \infty} y_{m+n}^{p^m}$ est l'inverse de l'isomorphisme décrit dans la proposition.

De cette manière, dans les hypothèses de la proposition, on peut voir un élément de $R(A)$ comme une suite d'éléments $(x_n)_n$ de A/pA ou, si l'on préfère, comme une suite d'éléments $(x^{(n)})_n$ de A .

Considérons maintenant un corps p -adique K , et notons $C = \widehat{K}$ et $A = \mathcal{O}_C$. L'anneau A est alors automotiquement séparé et complet pour la topologie p -adique. Dans la suite, on notera toujours R l'anneau $R(A)$, pour ce choix d'anneau A . On notera aussi k le corps résiduel de K et K_0 la sous-extension maximale non ramifiée de K/\mathbb{Q}_p .

Il sera utile de munir R d'une valuation :

Définition 5.2.4. (Valuation de R)

Notons $|\cdot|_p$ la valeur absolue de C normalisée de sorte que $|p| = p^{-1}$. Notons $v_p(\cdot) = \log_p |\cdot|_p$ la valeur absolue associée. On appelle v_R l'application

$$R \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}, x \mapsto v_p(x^{(0)}).$$

Elle s'étend à $\text{Frac}(R)$ par $v_R(xy^{-1}) = v_R(x) - v_R(y)$.

5.3 Anneaux (F, G) -réguliers

Références : [FO, section 2.1] et [BC, section 5].

Dans cette partie, nous allons décrire la situation abstraite générale que nous allons appliquer de nombreuses fois par la suite à des anneaux particuliers, afin de classifier des représentations du groupe de Galois d'un corps p -adique. On se donne B un anneau topologique et G un groupe topologique qui agit continûment par isomorphismes d'anneaux sur B . Soit $E = B^G$, et supposons que E soit un corps. Considérons finalement F un sous-corps fermé de E .

Définition 5.3.1. (Anneaux (F, G) -réguliers)

On dit que B est (F, G) -régulier si :

- (i) L'anneau B est intègre.
- (ii) On a $(\text{Frac}(B))^G = E$.
- (iii) Pour tout $b \in B$ non nul, si $g(b) \in Fb$ pour tout $g \in G$, alors b est inversible.

Considérons maintenant V une représentation continue de G sur F de dimension finie. En choisissant différents anneaux B , on classifera les représentations grâce à la définition suivante :

Définition 5.3.2. (Représentations B -admissibles)

On dit que la représentation V est B -admissible si $B \otimes_F V$ est une B -représentation triviale de G , c'est-à-dire une B -représentation de G isomorphe à B^n pour un certain n .

Afin de caractériser autrement les représentations B -admissibles, il convient de définir le E -espace vectoriel $D_B(V) = (B \otimes_F V)^G$ ainsi que le morphisme de B -modules :

$$\alpha_V : B \otimes_E D_B(V) \rightarrow B \otimes_F V, \lambda \otimes x \mapsto \lambda x.$$

En effet, le théorème suivant s'avère particulièrement utile lorsque B est (F, G) -régulier (et ce sera toujours le cas dans la suite) :

Théorème 5.3.3. (Caractérisation des représentations B -admissibles)

Supposons que B est (F, G) -régulier. Alors α_V est injectif et $\dim_E(D_B(V)) \leq \dim_F(V)$. De plus, les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (i) La représentation V est B -admissible.
- (ii) Le morphisme injectif α_V est un isomorphisme.
- (iii) On a l'égalité $\dim_E(D_B(V)) = \dim_F(V)$.

Nous sommes à présent en mesure de définir différents types de représentations en choisissant certains anneaux B particuliers.

5.4 Représentations de Hodge-Tate

Références : [FO, section 5.1] et [BC, sections 2.3 et 2.4].

Considérons un corps p -adique K . Le **module de Tate**, noté $\mathbb{Z}_p(1)$ de K est par définition $\varprojlim \mu_{p^n}(K)$, où $\mu_{p^n}(K)$ désigne les racines p^n -èmes de l'unité dans \overline{K} . On peut le munir d'une action de \mathbb{Z}_p par $\lambda(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_0^{\lambda \bmod 1}, x_1^{\lambda \bmod p}, x_2^{\lambda \bmod p^2}, \dots)$, pour $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ et $(x_i)_i \in \mathbb{Z}_p(1)$. Le module de Tate est alors un \mathbb{Z}_p -module libre de rang 1. Il est en plus muni d'une action naturelle de $G_K : \sigma(x_0, x_1, \dots) = (\sigma(x_0), \sigma(x_1), \dots)$ pour $\sigma \in G_K$ et $(x_i)_i \in \mathbb{Z}_p(1)$. On remarque que, si $\chi : G_K \rightarrow \mathbb{Z}_p$ est le caractère cyclotomique, on a, pour $x \in \mathbb{Z}_p(1)$ et $\sigma \in G_K$, $\sigma x = \chi(\sigma)x$. Par conséquent, nous pouvons écrire $\mathbb{Z}_p(1) = \mathbb{Z}_p t$, où t est un générateur du module de Tate, avec une action de G_K donnée par $\sigma t = \chi(\sigma)t$, pour $\sigma \in G_K$.

On peut maintenant définir le module $\mathbb{Z}_p(i) = \mathbb{Z}_p^{\otimes i}$ pour $i \geq 0$ et le module $\mathbb{Z}_p(i) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p(-i), \mathbb{Z}_p)$ pour $i < 0$. Ainsi, pour tout i , $\mathbb{Z}_p(i)$ est un \mathbb{Z}_p -module

libre de rang 1 muni d'une action naturelle de G_K , et on remarque que, pour $\sigma \in G_K$ et $x \in \mathbb{Z}_p(i)$, $\sigma x = \chi^i(\sigma)x$.

Définition 5.4.1. Anneau de Hodge-Tate

On définit l'**anneau de Hodge-Tate** par $B_{HT} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C(i) = C[t, \frac{1}{t}]$. C'est un anneau topologique gradué.

On peut alors vérifier assez aisément que l'anneau de Hodge-Tate est (\mathbb{Q}_p, G_K) -régulier, avec $B_{HT}^{G_K} = K$. Par conséquent, il semble naturel d'utiliser la partie précédente afin de classifier certains types de représentations à l'aide de l'anneau B_{HT} , d'où la définition :

Définition 5.4.2. (Représentations de Hodge-Tate)

Soit V une représentation continue p -adique de G_K . On note $D_{HT}(V) = (B_{HT} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$. On dit que V est **de Hodge-Tate** si V est B_{HT} -admissible, ou, de manière équivalente, si $\dim_K D_{HT}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

On remarque de plus que $D_{HT}(V) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{gr}^i D_{HT}(V)$ où $\text{gr}^i D_{HT}(V) = (C(i) \otimes V)^{G_K}$. Les **poinds de Hodge-Tate** de V sont alors par définition les entiers i tels que $\text{gr}^i D_{HT}(V) \neq 0$, comptés avec la multiplicité $\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{gr}^i D_{HT}(V)$.

5.5 Représentations de de Rham

Références : [FO, section 5.2] et [BC, sections 4.4 et 6].

Nous allons maintenant nous intéresser à l'anneau $W(R)$. Comme nous l'avons déjà vu, un élément $x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in W(R)$ peut être interprété de deux manières : on peut écrire $x_m = (x_{m,r})_r$ avec $x_{m,r} \in \mathcal{O}_C/p$ et $x_{m,r+1}^p = x_{m,r}$, ou bien on peut écrire $x_m = (x_m^{(r)})_r$ avec $x_m^{(r)} \in \mathcal{O}_C$ et $(x_m^{(r+1)})^p = x_m^{(r)}$. On a alors un morphisme $W(R) \rightarrow W_n(\mathcal{O}_C/p)$, $x \mapsto (x_{0,n}, x_{1,n}, \dots, x_{n-1,n})$, et les morphismes ainsi obtenus rendent le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & W_{n+1}(\mathcal{O}_C/p) \\ & \nearrow & \downarrow f_n: (x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0^p, \dots, x_n^p) \\ W(R) & \longrightarrow & W_n(\mathcal{O}_C/p) \end{array}$$

On vérifie alors que $W(R) \cong \varprojlim W_n(\mathcal{O}_C/p)$ où les flèches de transition sont les f_n . On peut maintenant considérer les morphismes d'anneaux

$$\begin{aligned} w_{n+1} : W_{n+1}(\mathcal{O}_C) &\rightarrow \mathcal{O}_C/p^n, (x_0, \dots, x_n) \mapsto \overline{W_n(x_0, \dots, x_n)} \\ v_n : W_{n+1}(\mathcal{O}_C) &\rightarrow W_n(\mathcal{O}_C/p), (x_0, \dots, x_n) \mapsto (\overline{x_0}, \dots, \overline{x_{n-1}}). \end{aligned}$$

On remarque que $\text{Ker}(v_n) \subseteq \text{Ker}(w_{n+1})$. Il existe donc un unique morphisme d'anneaux $\theta_n : W_n(\mathcal{O}_C/p) \rightarrow \mathcal{O}_C/p^n$ tel que $w_{n+1} = v_n \circ \theta_n$. On remarque immédiatement que $\theta_n(\overline{x_0}, \dots, \overline{x_{n-1}}) = \sum_{i=0}^{n-1} p^i \overline{x_i^{p^{n-i}}}$ pour $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathcal{O}_C$. On dispose donc d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} W_{n+1}(\mathcal{O}_C/p) & \xrightarrow{\theta_{n+1}} & \mathcal{O}_C/p^{n+1} \\ f_n \downarrow & & \downarrow \\ W_n(\mathcal{O}_C/p) & \xrightarrow{\theta_n} & \mathcal{O}_C/p^n \end{array}$$

En prenant la limite projective, nous obtenons ainsi un morphisme d'anneaux $\theta : W(R) \rightarrow \mathcal{O}_C$. Nous pouvons alors décrire explicitement ce morphisme via le lemme suivant :

Lemme 5.5.1. (Le morphisme θ)

Soit $x = (x_0, x_1, \dots) \in W(R)$, avec $x_n \in R$. Notons $x_n = (x_n^{(r)})_{r \geq 0}$, avec $x_n^{(r)} \in \mathcal{O}_C$. Alors $\theta(x) = \sum_{n \geq 0} p^n x_n^{(n)}$.

La proposition suivante permet de déterminer le noyau de θ :

Proposition 5.5.2. (Noyau de θ)

Soit $\varpi \in R$ tel que $\varpi^{(0)} = -p$, et notons $\xi = (\varpi, 1, 0, 0, \dots)$. Alors θ est surjective et son noyau est l'idéal engendré par ξ . De plus, $\bigcap_{n \geq 0} (\text{Ker}(\theta))^n = 0$.

On remarque immédiatement que θ s'étend continûment en $\theta : W(R) \left[\frac{1}{p} \right] \rightarrow C$. L'extension est toujours surjective, et son noyau est l'idéal $\xi W(R) \left[\frac{1}{p} \right]$. Nous pouvons à présent définir l'anneau de de Rham :

Définition 5.5.3. (Anneau de de Rham)

L'anneau de de Rham est, par définition : $B_{dR}^+ = \varprojlim W(R) \left[\frac{1}{p} \right] / (\text{Ker}(\theta))^n = \varprojlim W(R) \left[\frac{1}{p} \right] / (\xi)^n$. C'est le complété de $W(R) \left[\frac{1}{p} \right]$ pour la topologie $\text{Ker}(\theta)$ -adique. On appelle B_{dR} le corps des fractions de B_{dR}^+ .

On remarque immédiatement que B_{dR}^+ est un anneau de valuation discrète de corps résiduel C , et que $W(R) \left[\frac{1}{p} \right]$ s'injecte dans B_{dR}^+ . Comme C contient \overline{K} et comme $\overline{K}/\mathbb{Q}_p$ est séparable, le lemme de Hensel permet de construire une injection $\overline{K} \hookrightarrow B_{dR}^+$, de sorte que nous pouvons voir \overline{K} comme un sous-anneau de B_{dR}^+ . De plus, en notant $\text{Fil}^i B_{dR} = (\text{Ker}(\theta))^i B_{dR}^+$, on obtient une filtration de B_{dR} .

L'action de G_K sur $W(R) \left[\frac{1}{p} \right]$ laisse $\text{Ker}(\theta)$ invariant, d'où une action naturelle de G_K sur B_{dR}^+ et sur B_{dR} . Afin d'étudier cette action, on considère $\epsilon \in R$ tel que $\epsilon^{(0)} = 1$ et $\epsilon^{(1)} \neq 1$. On remarque $[\epsilon] - 1 \in \text{Ker}(\theta)$. Par conséquent, la série $t = \log[\epsilon] = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{([\epsilon] - 1)^n}{n}$ converge dans B_{dR}^+ . On observe immédiatement que $t \in \text{Fil}^1 B_{dR}$. La proposition suivante établit en fait que t est une uniformisante :

Proposition 5.5.4. (Uniformisante de B_{dR}^+)

L'élément t n'appartient pas à $\text{Fil}^2 B_{dR}$ et est donc une uniformisante de B_{dR}^+ .

Cette uniformisante est très utile pour comprendre l'action de G_K sur B_{dR} . En effet, pour $\sigma \in G_K$, on peut montrer que $\sigma t = \chi(\sigma)t$, et donc $\text{Fil}^i B_{dR} = B_{dR}^+(i)$. Ainsi, si l'on note $\text{gr}^i B_{dR} = \text{Fil}^i B_{dR} / \text{Fil}^{i+1} B_{dR}$ et $\text{gr} B_{dR} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{gr}^i B_{dR}$, on obtient que $\text{gr} B_{dR} = \bigoplus_i C(i)$, d'où :

Proposition 5.5.5. (Anneaux de Hodge-Tate et de de Rham)

On a $\text{gr} B_{dR} = B_{HT}$.

Par conséquent, toute l'information de l'anneau B_{HT} est contenue dans B_{dR} .

Jusqu'ici, nous avons construit un anneau intègre topologique B_{dR} muni d'une action continue de G_K , tel que $B_{dR}^{G_K} = K$. Comme B_{dR} est un corps, cela impose automatiquement que B_{dR} est (\mathbb{Q}_p, G_K) -régulier. Nous pouvons donc appliquer la théorie générale des représentations admissibles que nous avons développée précédemment. Pour V représentation p -adique continue de G_K , on pose donc $D_{dR}(V) = (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ et on définit :

Définition 5.5.6. (Représentations de de Rham)

On dit que V est de Rham si V est B_{dR} -admissible.

Rappelons que B_{dR} possède une filtration décroissante $\text{Fil}^i(B_{dR})$ telle que $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \text{Fil}^i(B_{dR}) = B_{dR}$ et $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \text{Fil}^i(B_{dR}) = 0$. Par conséquent, le K -espace vectoriel $D_{dR}(V)$ possède une filtration décroissante exhaustive et séparée $\text{Fil}^i(D_{dR}(V)) = (\text{Fil}^i(B_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$. Il semble alors naturel d'introduire la catégorie des K -espaces vectoriels filtrés :

Définition 5.5.7. (Espaces vectoriels filtrés)

On note Fil_K la catégorie des K -espaces vectoriels D de dimension finie munis d'une filtration $(\text{Fil}^i(D))_{i \in \mathbb{Z}}$ décroissante, exhaustive et séparée. Un morphisme d'espaces vectoriels filtrés est une application linéaire qui respecte les filtrations.

On remarque immédiatement que cette catégorie admet des noyaux et des conoyaux, mais n'est pas abélienne. Par exemple, considérons les modules filtrés D et D' définis comme suit : $D = D' = K$, avec les filtrations $\text{Fil}^i D = K$ si $i \leq 0$

et $Fil^i D = 0$ si $i > 0$, $Fil^i D' = K$ si $i \leq 1$ et $Fil^i D' = 0$ si $i > 1$. L'identité $Id : D \rightarrow D'$ est un morphisme d'espaces filtrés. Son noyau et son conoyau sont nuls, mais elle n'est pas un isomorphisme, donc Fil_K n'est pas une catégorie abélienne.

On peut cependant définir une notion de suite exacte, ainsi qu'un produit tensoriel et un dual :

Définition 5.5.8. (*Suites exactes courtes, produits tensoriels, duaux*)

(i) On dit que

$$0 \longrightarrow D' \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} D'' \longrightarrow 0$$

est une **suite exacte courte d'espaces filtrés** si pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la suite d'espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow Fil^i D' \xrightarrow{f} Fil^i D \xrightarrow{g} Fil^i D'' \longrightarrow 0$$

est exacte.

(ii) Soient D et D' deux espaces filtrés. On note $D \otimes D'$ l'espace filtré qui est $D \otimes_K D'$ en tant qu'espace vectoriel, muni de la filtration $Fil^i(D \otimes D') = \sum_{j+j'=i} Fil^j D \otimes_K Fil^{j'} D'$.

(iii) Soit D un espace filtré. On note D^* l'espace filtré qui est $\mathcal{L}_K(D, K)$ en tant qu'espace vectoriel, muni de la filtration $Fil^i D^* = (Fil^{-i+1} D)^\perp$.

Nous disposons d'un foncteur $D_{dR} : Rep_{\mathbb{Q}_p}^{dR}(G_K) \rightarrow Fil_K$, où $Rep_{\mathbb{Q}_p}^{dR}(G_K)$ désigne la catégorie des représentations p -adiques de G_K qui sont de de Rham. Ce foncteur possède les propriétés importantes suivantes :

Théorème 5.5.9. (*Propriétés du foncteur D_{dR}*)

Le foncteur D_{dR} est exact et fidèle, et est compatible avec les produits tensoriels et la dualité.

Ce sont bien évidemment de bonnes propriétés du foncteur D_{dR} , mais nous sommes insatisfaits, parce que D_{dR} n'est pas pleinement fidèle, et donc ne permet pas d'établir une équivalence de catégories entre les représentations p -adiques de G_K de de Rham et une sous-catégorie pleine de Fil_K . C'est pourquoi nous allons introduire dans la suite des anneaux avec des structures plus fines que B_{dR} . Mais avant cela, étudions les liens entre les représentations de de Rham et celles de Hodge-Tate.

Soit V une représentation p -adique de G_K . On a alors des suites exactes :

$$0 \rightarrow Fil^{i+1} B_{dR} \rightarrow Fil^i B_{dR} \rightarrow C(i) \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
0 &\rightarrow \text{Fil}^{i+1} B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \rightarrow \text{Fil}^i B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \rightarrow C(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \rightarrow 0 \\
0 &\rightarrow \text{Fil}^{i+1} D_{dR}(V) \rightarrow \text{Fil}^i D_{dR}(V) \rightarrow (C(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}
\end{aligned}$$

Donc, si l'on pose $\text{gr}^i D_{dR}(V) = \text{Fil}^i D_{dR}(V) / \text{Fil}^{i+1} D_{dR}(V)$, alors :

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{gr}^i D_{dR}(V) \hookrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (C(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} = D_{HT}(V).$$

En notant $\text{gr} D_{dR}(V) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{gr}^i D_{dR}(V)$, on obtient facilement le théorème suivant :

Théorème 5.5.10. (*De Rham implique Hodge-Tate*)

On a toujours une inclusion $\text{gr} D_{dR}(V) \hookrightarrow D_{HT}(V)$. Si V est de de Rham, alors V est de Hodge-Tate, et $\text{gr} D_{dR}(V) = D_{HT}(V)$.

Il est alors naturel de se demander s'il existe des représentations de Hodge-Tate qui ne sont pas de de Rham. La réponse est oui, mais c'est nettement plus difficile à établir. Pour ce faire, on peut montrer qu'il existe une représentation p -adique V de G_K qui est une extension non triviale de $\mathbb{Q}_p(1)$ par \mathbb{Q}_p , puis que cette extension V est de Hodge-Tate mais pas de de Rham.

Tentons maintenant d'améliorer notre anneau de périodes B_{dR} pour obtenir des équivalences entre des catégories de représentations et des catégories provenant de l'algèbre linéaire.

5.6 Représentations cristallines

Références : [FO, sections 6.1 et 6.3] et [BC, section 9.1].

Introduisons de nouveaux anneaux de périodes :

Définition 5.6.1. (*Anneaux cristallins*)

- (i) On appelle A_{cris}^0 le sous-anneau de $W(R) \left[\frac{1}{p} \right]$ engendré par $W(R)$ et les $\frac{a^m}{m!}$ pour $a \in \text{Ker}(\theta)$. Autrement dit, $A_{cris}^0 = \left\{ \sum_{i=0}^N x_i \frac{\xi^m}{m!} : N \in \mathbb{N}, x_i \in W(R) \right\}$.
- (ii) On appelle A_{cris} l'anneau $\varprojlim A_{cris}^0 / p^n$. C'est un anneau p -adiquement séparé et complet : c'est la complétion de A_{cris}^0 pour la topologie p -adique.
- (iii) On appelle B_{cris}^+ l'anneau $A_{cris} \left[\frac{1}{p} \right]$.

En fait, A_{cris}^0 , A_{cris} et B_{cris} sont stables pour l'action de G_K , et on peut prouver que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
& B_{cris}^+ & \\
& \uparrow & \searrow \\
A_{cris} & \hookrightarrow & B_{dR}^+ \\
& \uparrow & \uparrow \\
A_{cris}^0 & \hookrightarrow & W(R) \left[\frac{1}{p} \right]
\end{array}$$

compatible avec l'action de G_K . De plus, l'image de A_{cris} dans B_{dR}^+ est l'ensemble des $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\xi^m}{m!}$ pour a_n une suite de $W(R)$ qui converge p -adiquement vers 0, et l'image de B_{cris}^+ est l'ensemble des $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\xi^m}{m!}$ pour a_n une suite de $W(R) \left[\frac{1}{p} \right]$ qui converge p -adiquement vers 0. Rappelons que nous avons introduit un élément de B_{dR}^+ défini par $t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lfloor n \rfloor - 1)^n}{n}$. Il est alors assez aisé de prouver que t appartient à A_{cris} et que t^{p-1} appartient à pA_{cris} , et donc on peut définir :

Définition 5.6.2. (*L'anneau B_{cris}*)

On appelle B_{cris} le sous-anneau $A_{cris} \left[\frac{1}{t} \right]$ de B_{dR} . C'est en fait aussi l'anneau $B_{cris}^+ \left[\frac{1}{t} \right]$.

Afin d'établir des équivalences entre certaines catégories de représentations galoisiennes et certaines catégories provenant de l'algèbre linéaire, il est fondamental de munir B_{cris} d'un Frobenius. Nous disposons de l'automorphisme de Frobenius de $W(R)$: $\phi : (a_0, a_1, \dots) \mapsto (a_0^p, a_1^p, \dots)$. Il est clair qu'il existe $\eta \in W(R)$ tel que $\phi(\xi) = \xi^p + p\eta$, et nous pouvons alors étendre ϕ à A_{cris}^0 en posant

$$\phi \left(\frac{\xi^m}{m!} \right) = \frac{p^m}{m!} \left(\eta + (p-1)! \frac{\xi^p}{p!} \right)^m \in A_{cris}^0.$$

On peut ensuite prolonger ϕ à A_{cris} par continuité, puis à B_{cris}^+ en posant $\phi \left(\frac{1}{p} \right) = \frac{1}{p}$. On remarque de plus que $\phi(t) = pt$, et donc on peut étendre ϕ à B_{cris} en posant $\phi \left(\frac{1}{t} \right) = \frac{1}{pt}$. On peut finalement vérifier que ϕ commute avec l'action de G_K . Le morphisme d'anneaux $\phi : B_{cris} \rightarrow B_{cris}$ est appelé le **Frobenius**, et il est possible de prouver que ϕ est injectif.

Dans toute la suite de cette section, nous noterons K_0 la sous-extension maximale non ramifiée de K/\mathbb{Q}_p et φ le Frobenius de K_0 . Afin de définir des représentations cristallines, c'est-à-dire B_{cris} -admissibles, il nous faut la propriété fondamentale suivante :

Proposition 5.6.3. (Régularité de B_{cris})

L'anneau B_{cris} est (\mathbb{Q}_p, G_K) -régulier, avec $(B_{cris})^{G_K} = (B_{cris}^+)^{G_K} = K_0$.

Considérons maintenant V une représentation p -adique de G_K . Notons $D_{cris}(V) = (B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ et définissons :

Définition 5.6.4. (Représentations cristallines)

On dit que V est cristalline si elle est B_{cris} -admissible.

Remarquons que $D_{cris}(V)$ est un K_0 -espace vectoriel de dimension finie, qui est muni d'un endomorphisme φ -semi-linéaire bijectif induit par $B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \rightarrow B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V, b \otimes v \mapsto \phi(b) \otimes v$. De plus, $D_{cris}(V) \otimes_{K_0} K$ est muni d'une filtration décroissante, exhaustive et séparée : $Fil^i(D_{cris}(V) \otimes_{K_0} K) = (D_{cris}(V) \otimes_{K_0} K) \cap Fil^i(D_{dR}(V))$. Il est donc naturel d'introduire la catégorie :

Définition 5.6.5. (Catégorie des ϕ -modules filtrés)

Un ϕ -module filtré sur K est un K_0 -espace vectoriel D de dimension finie muni d'un endomorphisme φ -semi-linéaire $\phi : D \rightarrow D$ et d'une filtration $(Fil^i(D_K))_{i \in \mathbb{Z}}$ de $D_K = D \otimes_{K_0} K$ décroissante, exhaustive et séparée. L'endomorphisme ϕ est appelé le Frobenius. Un morphisme $D \rightarrow D'$ de ϕ -modules filtrés est une application K_0 -linéaire $f : D \rightarrow D'$ compatible avec les Frobenius et telle que $f_K : D_K \rightarrow D'_K$ est compatible avec les filtrations. Cela définit une catégorie que l'on notera MF_K^ϕ .

La catégorie des ϕ -modules filtrés est additive (mais pas abélienne). On voit immédiatement que D_{cris} est un foncteur de $Rep_{\mathbb{Q}_p}^{cris}(G_K)$, catégorie des représentations p -adiques cristallines de G_K , dans MF_K^ϕ . Ce foncteur est fondamental puisqu'il va permettre d'établir une équivalence de catégories entre $Rep_{\mathbb{Q}_p}^{cris}(G_K)$ et certaines catégories provenant de l'algèbre linéaire. Voici un premier résultat dans ce sens :

Proposition 5.6.6. (Propriétés du foncteur D_{cris})

Le foncteur $D_{cris} : Rep_{\mathbb{Q}_p}^{cris}(G_K) \rightarrow MF_K^\phi$ est exact et pleinement fidèle.

Afin d'établir une équivalence de catégories, il nous faut déterminer l'image essentielle de D_{cris} . Mais avant de traiter ce problème, nous allons définir un anneau de périodes de plus et introduire les représentations semi-stables.

5.7 Représentations semi-stables

Références : [FO, section 6.1 et 6.3] et [BC, section 9.2].

Dans cette section, nous allons construire l'anneau de périodes B_{st} . Pour ce faire, nous avons d'abord besoin de définir un logarithme. Rappelons que nous disposons d'une valuation v_R sur $Frac(R)$. Nous pouvons donc poser $U_R^+ = \{x \in R : v_R(x - 1) > 0\}$ et $U_R^1 = \{x \in R : v_R(x - 1) \geq 1\}$. On définit alors le logarithme en trois étapes :

- (i) Pour $x \in U_R^1$, on pose $\log x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{([x]-1)^n}{n} \in B_{dR}$.
- (ii) Pour $x \in U_R^+$, on peut trouver $m \in \mathbb{N}$ tel que $x^{p^m} \in U_R^1$, et l'on pose alors $\log x = \frac{\log [x^{p^m}]}{p^m}$.
- (iii) Rappelons que $R^\times = \bar{k}^\times \times U_R^+$. Pour $x \in R^\times$, on écrit alors $x = ay$ avec $a \in \bar{k}^\times$ et $y \in U_R^+$, puis on pose $\log x = \log y$.

Rappelons que nous disposons d'un élément $\varpi \in R^\times$ tel que $\varpi^{(0)} = -p$. Par conséquent, $\log \varpi$ est bien défini. On peut donc introduire l'anneau de périodes :

Définition 5.7.1. (L'anneau B_{st})

On appelle B_{st} la sous- B_{cris} -algèbre de B_{dR} engendrée par $\log \varpi$.

La sous-algèbre B_{st} de B_{dR} est alors stable sous l'action de G_K , puisque $\log(g\varpi) = \log \varpi + \chi(g)t$ pour $g \in G_K$, où $t = \log \epsilon$ avec $\epsilon \in R$ tel que $\epsilon^{(0)} = 1$ et $\epsilon^{(1)} \neq 1$. Le théorème suivant permet de mieux comprendre la structure algébrique de B_{st} ainsi que l'action de G_K :

Théorème 5.7.2. (Propriétés de B_{st})

- (i) Le morphisme de B_{cris} -algèbres $B_{cris}[X] \rightarrow B_{st}$ qui envoie X sur $\log \varpi$ est un isomorphisme.
- (ii) On a $\text{Frac}(B_{st})^{G_K} = B_{st}^{G_K} = K_0$.
- (iii) L'application K -linéaire naturelle $K \otimes_{K_0} B_{st} \rightarrow B_{dR}$ est injective.

Encore une fois, afin de donner des équivalences entre des catégories de représentations galoisiennes et des catégories provenant de l'algèbre linéaire, nous devons munir B_{st} de deux structures supplémentaires : un Frobenius et un opérateur de monodromie.

Rappelons que nous avons déjà construit un Frobenius ϕ sur B_{cris} . Le **Frobenius** sur B_{st} est alors par définition le morphisme d'anneaux $B_{st} \rightarrow B_{st}$ qui étend ϕ et qui envoie $\log \varpi$ sur $p \log \varpi$. On le note toujours ϕ . On peut alors prouver que ϕ commute avec l'action de G_K et est injectif.

Définissons maintenant l'opérateur de monodromie :

Définition 5.7.3. (Monodromie)

L'**opérateur de monodromie** de B_{st} est l'unique B_{cris} -dérivation N de B_{st} telle que $N(\log \varpi) = -1$. Plus explicitement,

$$N \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (\log \varpi)^n \right) = - \sum_{n=0}^{\infty} n b_n (\log \varpi)^{n-1}.$$

Comme $B_{cris}[X] \cong B_{st}$, la monodromie est surjective et son noyau n'est autre que B_{cris} , d'où une suite exacte B_{cris} -modules :

$$0 \longrightarrow B_{cris} \longrightarrow B_{st} \xrightarrow{N} B_{st} \longrightarrow 0$$

De plus, il n'est pas difficile de prouver les relations suivantes de compatibilité de la monodromie avec l'action de G_K et avec le Frobenius :

Proposition 5.7.4. (Compatibilité de la monodromie)

On a $gN = Ng$ pour $g \in G_K$ et $N\phi = p\phi N$.

À l'aide du théorème 5.7.2 il est possible de montrer que B_{st} est (\mathbb{Q}_p, G_K) -régulier. Étant donnée une représentation p -adique V de G_K , il est alors naturel de poser $D_{st}(V) = (B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$, et de définir :

Définition 5.7.5. (Représentations semi-stables)

On dit que V est **semi-stable** si elle est B_{st} -admissible.

Considérons V une représentation p -adique quelconque. D'après le théorème 5.7.2, on sait que $K \otimes_{K_0} B_{st} \hookrightarrow B_{dR}$. Par conséquent :

$$K \otimes_{K_0} D_{st}(V) = K \otimes_{K_0} (B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} = ((K \otimes_{K_0} B_{st}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \hookrightarrow (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} = D_{dR}(V).$$

Si V est semi-stable, alors $\dim_{K_0} D_{st}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$, d'où :

$$\dim_K D_{dR}(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V = \dim_K (K \otimes_{K_0} V) \leq \dim_K D_{dR}(V),$$

et $\dim_K D_{dR}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$. On en déduit que :

Proposition 5.7.6. (Semi-stable implique de Rham)

Si V est semi-stable, alors V est de Rham, et $D_{dR}(V) = K \otimes_{K_0} D_{st}(V)$.

Il y a aussi un rapport entre les représentations semi-stables et les représentations cristallines. En effet, soit V une représentation p -adique de G_K . Comme $B_{cris} = \text{Ker}(N : B_{st} \rightarrow B_{st})$, on a $D_{cris}(V) = \text{Ker}(N : D_{st}(V) \rightarrow D_{st}(V))$. Par conséquent, si V est cristalline, alors V est semi-stable et on a $D_{cris}(V) \cong D_{st}(V)$: cet isomorphisme, a priori de K_0 -espaces vectoriels, est en fait un isomorphisme dans MF_K^ϕ . Réciproquement, si V est semi-stable et $N = 0$ sur $D_{st}(V)$, alors $D_{cris}(V) = D_{st}(V)$ et V est cristalline. On en déduit :

Proposition 5.7.7. (Cristalline implique semi-stable)

Une représentation p -adique V de G_K est cristalline si, et seulement si, V est semi-stable et la monodromie est nulle sur $D_{st}(V)$. De plus, dans ce cas, $D_{cris}(V) = D_{st}(V)$ dans MF_K^ϕ .

Étudions maintenant le K_0 -espace vectoriel de dimension finie $D_{st}(V)$ pour V une représentation p -adique quelconque. Nous savons que B_{st} est muni d'un Frobenius et d'une monodromie. Nous pouvons donc définir un Frobenius et une monodromie sur $B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ par :

$$\phi(b \otimes v) = \phi(b) \otimes v, N(b \otimes v) = N(b) \otimes v.$$

De cette manière, ϕ et N commutent clairement avec l'actions de G_K , et $N\phi = p\phi N$. Par conséquent, $D_{st}(V)$ est un K_0 -espace vectoriel de dimension finie stable par ϕ et N sur lequel ϕ est bijectif (puisque le Frobenius sur B_{st} est injectif). De plus, $D_{st}(V) \otimes_{K_0} K \subseteq D_{dR}(V)$ est muni d'une filtration décroissante, exhaustive et séparée : $Fil^i(D_{st}(V) \otimes_{K_0} K) = (D_{st}(V) \otimes_{K_0} K) \cap Fil^i(D_{dR}(V))$. Il est donc naturel d'introduire la catégorie des (ϕ, N) -modules filtrés :

Définition 5.7.8. (Catégorie des (ϕ, N) -modules filtrés)

(A) Un (ϕ, N) -**module** sur K_0 est un K_0 -espace vectoriel D muni de deux applications $\phi, N : D \rightarrow D$ telles que :

(i) ϕ est semi-linéaire par rapport au Frobenius φ sur K_0 .

(ii) N est une application K_0 -linéaire.

(iii) $N\phi = p\phi N$.

On dit que ϕ est le Frobenius sur D , et que N est la monodromie.

Un **morphisme** $D \rightarrow D'$ de (ϕ, N) -modules sur K_0 est une application K_0 -linéaire qui commute avec ϕ et avec N .

(B) Un (ϕ, N) -**module filtré** sur K est un (ϕ, N) -module D sur K_0 muni d'une filtration décroissante, exhaustive et séparée de $D_K = D \otimes_{K_0} K$.

Un **morphisme** $f : D \rightarrow D'$ de (ϕ, N) -modules filtrés est un morphisme de (ϕ, N) -modules tel que $f_K : D_K \rightarrow D'_K$ est compatible avec les filtrations. On notera $MF_K^{\phi, N}$ la catégories de (ϕ, N) -modules filtrés sur K .

On remarque immédiatement que la catégorie des (ϕ, N) -modules sur K_0 est abélienne, et que la catégorie des (ϕ, N) -modules filtrés sur K est additive (mais pas abélienne). On voit immédiatement que D_{cris} est un foncteur de $Rep_{\mathbb{Q}_p}^{st}(G_K)$, catégorie des représentations p -adiques semi-stables de G_K , dans $MF_K^{\phi, N}$. Ce foncteur est fondamental puisqu'il va permettre d'établir une équivalence de catégories entre $Rep_{\mathbb{Q}_p}^{st}(G_K)$ et certaines catégories provenant de l'algèbre linéaire. Voici un premier résultat dans ce sens :

Proposition 5.7.9. (Propriétés du foncteur D_{cris})

Le foncteur $D_{st} : Rep_{\mathbb{Q}_p}^{st}(G_K) \rightarrow MF_K^{\phi}$ est exact et pleinement fidèle.

Afin d'établir une équivalence de catégories, il nous faut déterminer l'image essentielle de D_{st} . C'est ce problème que nous traitons dans la section suivante, en introduisant des modules filtrés admissibles.

5.8 Admissibilité des modules filtrés et équivalences de catégories

Références : [FO, sections 6.4 et 6.5.2] et [BC, sections 8 et 9.3].

Dans cette partie, nous allons déterminer les images essentielles de D_{cris} et de D_{st} . Pour ce faire, nous allons introduire deux entiers associés à un ϕ -module filtré D : $t_N(D)$ et $t_H(D)$. Ces deux entiers vont nous permettre de relier le Frobenius et la filtration d'un ϕ -module filtré. Les indices N et H désignent ici Newton et Hodge. Soit D un ϕ -module filtré sur K de dimension finie sur lequel ϕ est bijectif. Pour $i \in \mathbb{Z}$, on note $gr^i D_K = Fil^i(D_K)/Fil^{i+1}(D_K)$. On définit alors :

$$t_H(D) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \dim_K(gr^i D_K).$$

Cet entier, appelé **nombre de Hodge**, ne dépend bien évidemment que de la filtration de D_K .

Remarque 5.8.1. (Polygone de Hodge)

Au module filtré D_K , on peut associer un polygone convexe dans le plan comme suit. Notons $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ les indices $i \in \mathbb{Z}$ tels que $gr^i D_K \neq 0$. En partant de l'origine $(0,0)$ et en se déplaçant vers la droite, on dessine les uns à la suite des autres r -segments de pentes successives i_1, \dots, i_r et tels que leurs projections sur l'axe des abscisses soient de longueurs successives $\dim_K gr^{i_1} D_K, \dots, \dim_K gr^{i_r} D_K$. L'extrémité du dernier segment ainsi dessiné a pour abscisse $\dim_K D_K$ et pour ordonnée $t_H(D)$.

Fixons maintenant une base de D sur K_0 , et soit A la matrice de ϕ dans cette base. Il est clair que, comme ϕ est semi-linéaire, le déterminant de A dépend du choix de la base. Par contre, sa valuation p -adique n'en dépend pas. On pose donc $t_N(D) = v_p(\det A)$. Cet entier, que l'on appelle **nombre de Newton**, ne dépend que du Frobenius de D .

Remarque 5.8.2. (Polygone de Newton)

Notons $q = p^r = |k|$. L'application $\phi^r : D \rightarrow D$ est alors K_0 -linéaire, et on peut donc parler de ses valeurs propres. L'ensemble des $\frac{v_p(\lambda)}{v_p(q)}$ pour λ valeur propre de ϕ^r est appelé l'ensemble des **pentés** de D (attention, les pentés sont comptées avec multiplicités). On peut alors associer à D un polygone convexe dans le plan comme suit. Soient $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_s$ les pentés de D où $s = \dim_{K_0} D$. En partant de l'origine $(0,0)$ et en se déplaçant vers la droite, on dessine les uns à la suite des autres s -segments de pentés successives $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ et tels que leurs projections sur l'axe des abscisses soient toutes de longueur 1. L'extrémité du dernier segment ainsi construit a pour abscisse $s = \dim_{K_0} D$ et pour ordonnée $t_N(D)$.

Nous avons donc construit deux entiers qui sont associés à un ϕ -module filtré, l'un d'entre eux dépendant de la filtration et l'autre du Frobenius. Remarquons aussi que les quantités $t_N(D)$ et $t_H(D)$ sont aussi définies pour un (ϕ, N) -module filtré. Afin de décrire les images essentielles des foncteurs D_{cris} et D_{st} , il convient de définir la notion de (ϕ, N) -module filtré faiblement admissible :

Définition 5.8.3. ((ϕ, N) -modules filtrés faiblement admissibles)

Soit D un (ϕ, N) -module filtré sur K . On dit que D est **faiblement admissible** si D est de dimension finie, le Frobenius ϕ est bijectif, $t_H(D) = t_N(D)$ et, pour tout sous- (ϕ, N) -module filtré D' de D , $t_H(D') \leq t_N(D')$. Les (ϕ, N) -modules filtrés faiblement admissibles forment une sous-catégorie pleine de $MF_K^{\phi, N}$, que l'on notera $MF_K^{\phi, N, ad}$.

Bien évidemment, on peut définir de la même manière un ϕ -**module filtré faiblement admissible** : c'est tout simplement un (ϕ, N) -module filtré faiblement admissible pour lequel $N = 0$. On notera $MF_K^{\phi, ad}$ la catégorie des ϕ -modules filtrés faiblement admissibles sur K .

Rappelons maintenant que $D_{cris} : Rep_{\mathbb{Q}_p}^{cris}(G_K) \rightarrow MF_K^{\phi}$ et $D_{st} : Rep_{\mathbb{Q}_p}^{st}(G_K) \rightarrow MF_K^{\phi, N}$ sont deux foncteurs pleinement fidèles. Nous disposons aussi des deux foncteurs suivants :

$$V_{cris} : MF_K^{\phi} \rightarrow Rep_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$$

$$D \mapsto \{v \in B_{cris} \otimes_{K_0} D : \phi(v) = v, v \otimes 1 \in Fil^0(B_{cris} \otimes_{K_0} D \otimes_{K_0} K)\}$$

$$V_{st} : MF_K^{\phi, N} \rightarrow Rep_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$$

$$D \mapsto \{v \in B_{st} \otimes_{K_0} D : \phi(v) = v, N(v) = 0, v \otimes 1 \in Fil^0(B_{st} \otimes_{K_0} D \otimes_{K_0} K)\}$$

Nous pouvons à présent préciser l'image essentielle des foncteurs D_{cris} et D_{st} :

Théorème 5.8.4. (Équivalences de catégories)

- (i) Si V est une représentation p -adique cristalline de G_K , alors $D_{cris}(V)$ est un ϕ -module filtré faiblement admissible sur K .
- (ii) Si D est un ϕ -module filtré faiblement admissible sur K , alors $V_{cris}(D)$ est une représentation cristalline de G_K .
- (iii) Le foncteur $D_{cris} : Rep_{\mathbb{Q}_p}^{cris}(G_K) \rightarrow MF_K^{\phi, ad}$ est une équivalence de catégories de quasi-inverse V_{cris} .
- (iv) Si V est une représentation p -adique semi-stable de G_K , alors $D_{st}(V)$ est un (ϕ, N) -module filtré faiblement admissible sur K .
- (v) Si D est un (ϕ, N) -module filtré faiblement admissible sur K , alors $V_{st}(D)$ est une représentation semi-stable de G_K .
- (vi) Le foncteur $D_{st} : Rep_{\mathbb{Q}_p}^{st}(G_K) \rightarrow MF_K^{\phi, N, ad}$ est une équivalence de catégories de quasi-inverse V_{st} .

Ce théorème important a été démontré par Pierre Colmez et Jean-Marc Fontaine en 2000.

Pour terminer, remarquons que nous avons aussi des versions contravariantes de

ces équivalences de catégories. En effet, définissons les foncteurs contravariants suivants :

$$\begin{aligned}
D_{cris}^* &: Rep_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \rightarrow MF_K^\phi \\
&V \mapsto Hom_{G_K}(V, B_{cris}) \\
V_{cris}^* &: MF_K^\phi \rightarrow Rep_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \\
&D \mapsto Hom_\phi(D, B_{cris}) \cap Hom_{Fil}(D_K, B_{dR}) \\
D_{st}^* &: Rep_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \rightarrow MF_K^{\phi, N} \\
&D \mapsto Hom_{G_K}(V, B_{st}) \\
V_{st}^* &: MF_K^{\phi, N} \rightarrow Rep_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \\
&D \mapsto Hom_{\phi, N}(D, B_{cris}) \cap Hom_{Fil}(D_K, B_{dR})
\end{aligned}$$

Comme on a $D_{cris}^*(V) = D_{cris}(V^*)$, $V_{cris}^*(D) = V_{cris}(D^*)$, $D_{st}^*(V) = D_{st}(V^*)$ et $V_{st}^*(D) = V_{st}(D^*)$, on a alors le corollaire suivant :

Corollaire 5.8.5. (Anti-équivalences de catégories)

- (i) Si V est une représentation p -adique cristalline de G_K , alors $D_{cris}^*(V)$ est un ϕ -module filtré faiblement admissible sur K .
- (ii) Si D est un ϕ -module filtré faiblement admissible sur K , alors $V_{cris}^*(D)$ est une représentation cristalline de G_K .
- (iii) Le foncteur $D_{cris}^* : Rep_{\mathbb{Q}_p}^{cris}(G_K) \rightarrow MF_K^{\phi, ad}$ est une anti-équivalence de catégories de quasi-inverse V_{cris}^* .
- (iv) Si V est une représentation p -adique semi-stable de G_K , alors $D_{st}^*(V)$ est un (ϕ, N) -module filtré faiblement admissible sur K .
- (v) Si D est un (ϕ, N) -module filtré faiblement admissible sur K , alors $V_{st}^*(D)$ est une représentation semi-stable de G_K .
- (vi) Le foncteur $D_{st}^* : Rep_{\mathbb{Q}_p}^{st}(G_K) \rightarrow MF_K^{\phi, N, ad}$ est une anti-équivalence de catégories de quasi-inverse V_{st}^* .

5.9 Caractères

Référence : [BC, sections 6.3 et 9.3].

Dans cette section, nous nous intéressons aux propriétés des caractères de G_K : à quelles conditions sont-ils semi-stables ou cristallins ? Pour ce faire, il convient de comprendre que, pour étudier les propriétés d'une représentation de G_K , il suffit de connaître sa restriction au sous-groupe d'inertie :

Proposition 5.9.1. (Semi-stabilité et restriction au sous-groupe d'inertie)

Soit K' une extension de K contenue dans C . On suppose de plus que K' est un corps de valuation discrète complet. Soit V une représentation p -adique de G_K .

- (i) L'application naturelle $D_{dR}(V) \otimes_K K' \rightarrow D_{dR}(V|_{G_{K'}})$ est un isomorphisme dans $Fil_{K'}$.
- (ii) La représentation V de G_K est de de Rham si, et seulement si, la représentation $V|_{G_{K'}}$ de $G_{K'}$ l'est.
- (iii) Supposons maintenant que $K' = \widehat{K}^{nr}$, et on note K'_0 la sous-extension maximale non ramifiée de K' . L'application naturelle $D_{st}(V) \otimes_{K_0} K'_0 \rightarrow D_{st}(V|_{G_{K'}})$ est un isomorphisme dans $MF_{K'}^{\phi, N}$.
- (iv) On suppose toujours que $K' = \widehat{K}^{nr}$. La représentation V de G_K est semi-stable si, et seulement si, la représentation $V|_{G_{K'}} = I_K = Gal(\overline{K}/K^{nr})$ l'est.

En utilisant la proposition précédente pour remplacer K par \widehat{K}^{nr} , on prouve que :

Proposition 5.9.2. (Caractères)

Soit $\chi : G_K \rightarrow \mathbb{Q}_p^\times$ un caractère continu. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (i) χ est semi-stable.
 - (ii) χ est cristallin.
 - (iii) il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\chi \otimes \mathbb{Q}_p(n)$ est non ramifié.
- De plus, dans (iii), n est le poids de Hodge-Tate de χ .

5.10 Représentations potentiellement semi-stables

Références : [FO, section 6.5.1] et [BC, section 9.3].

Nous allons introduire une dernière classe de représentations galoisiennes qui élargit la définition des représentations semi-stables.

Définition 5.10.1. (Représentations potentiellement B -admissibles)

Soit B une \mathbb{Q}_p -algèbre munie d'une action de G_K . Supposons que B est $(\mathbb{Q}_p, G_{K'})$ -régulier pour toute extension finie K' de K . On dit que V est **potentiellement B -admissible** s'il existe une extension finie K' de K telle que V est B -admissible en tant que représentation de $G_{K'}$.

La condition sur B décrite dans la définition précédente est satisfaite par les anneaux B_{HT} , B_{dR} et B_{st} . Il se trouve que pour les anneaux B_{HT} et B_{dR} , la notion de potentielle admissibilité est peu intéressante, puisque :

Proposition 5.10.2. (Potentielle admissibilité)

Pour $B = B_{HT}$ ou B_{dR} , une représentation p -adique est potentiellement B -admissible si, et seulement si, elle est B -admissible.

Par contre, pour $B = B_{st}$, la potentielle admissibilité est nettement plus intéressante, d'où la définition :

Définition 5.10.3. (Représentations potentiellement semi-stables)

On dit qu'une représentation p -adique de G_K est **potentiellement semi-stable** si elle est potentiellement B_{st} -admissible.

Si V est une représentation potentiellement semi-stable de G_K , alors V est potentiellement B_{dR} -admissible, et donc V est de Rham. La réciproque est vraie, mais est un théorème très profond dû au travail de Laurent Berger en 2002 pour le ramener à une conjecture de la théorie des équations différentielles p -adiques (la conjecture de Crew) et aux travaux de Yves André (2002), Zoghman Mebkhout (2002) et Kiran Kedlaya (2004) pour prouver la conjecture de Crew elle-même :

Théorème 5.10.4. (Conjecture de la monodromie p -adique)

Une représentation de G_K est potentiellement semi-stable si, et seulement si, elle est de de Rham.

Pour résumer, nous avons les implications suivantes :

$$\text{Cristalline} \Rightarrow \text{Semi-stable} \Rightarrow \text{Pot. semi-stable} \Leftrightarrow \text{De Rham} \Rightarrow \text{Hodge-Tate}.$$

5.11 Coefficients dans une extension de \mathbb{Q}_p

Soit E une extension finie de \mathbb{Q}_p de degré d . Soit V une représentation de G_K sur E de dimension finie. On peut alors voir V comme une représentation de G_K de dimension finie sur \mathbb{Q}_p . On dira que V est **de Hodge-Tate, de de Rham, potentiellement semi-stable, semi-stable ou cristalline** si elle l'est en tant que représentation de G_K sur \mathbb{Q}_p .

Soit maintenant V une représentation de Hodge-Tate de dimension n sur E et supposons que E contienne la clôture normale de K dans \bar{K} . Remarquons maintenant que $D_{HT}(V)$ est un $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -module. Pour chaque $\sigma \in \text{Hom}(K, E)$, on pose $D_{HT, \sigma}(V) = D_{HT}(V) \otimes_{K \otimes_{\mathbb{Q}_p} E, \sigma \otimes \text{Id}} E$. Ainsi, on a $D_{HT}(V) = \bigoplus_{\sigma \in \text{Hom}(K, E)} D_{HT, \sigma}(V)$. De plus, si l'on pose $\text{Fil}^i(D_{HT, \sigma}(V)) = \text{Fil}^i(D_{HT}(V)) \otimes_{K \otimes_{\mathbb{Q}_p} E, \sigma \otimes \text{Id}} E$, on obtient que $\text{Fil}^i(D_{HT}(V)) = \bigoplus_{\sigma \in \text{Hom}(K, E)} \text{Fil}^i(D_{HT, \sigma}(V))$. On note alors $HT_{\sigma}(V)$ l'ensemble des entiers $i \in \mathbb{Z}$ tels que $\text{gr}^i(V) \neq 0$ comptés avec la multiplicité $\dim_E \text{gr}^i(D_{HT, \sigma}(V))$, de sorte que l'ensemble des poids $HT(V)$ que nous avons défini précédemment (en voyant V comme un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel) est égal à l'ensemble $\bigcup_{\sigma} HT_{\sigma}(V)$ où la multiplicité de chaque élément a été multipliée par

$[E : \mathbb{Q}_p]$. Comme il n'est pas intéressant de conserver ces répétitions, nous appellerons ensemble des poids de Hodge-Tate de V l'ensemble $\bigcup_{\sigma} HT_{\sigma}(V)$ (avec multiplicités) et nous le noterons $HT(V)$.

5.12 Représentations potentiellement semi-stables à coefficients dans des extensions de \mathbb{Q}_p

Référence : [EGH, section 3.1].

Supposons que K est une extension finie de \mathbb{Q}_p . Soient E une extension finie de \mathbb{Q}_p contenant la clôture normale de K et K' un corps intermédiaire de K/\mathbb{Q}_p tel que K/K' est une extension galoisienne. Notons φ le Frobenius de K_0 .

Considérons V une représentation potentiellement semi-stable de $G_{K'}$ sur E , qui devient semi-stable sur G_K . Dans ce cas, on sait que $D_{st}^*(V) = Hom_{G_K}(V, B_{st})$ est un (ϕ, N) -module filtré sur K . Mais on remarque immédiatement que $D_{st}^*(V)$ possède une structure plus riche : d'une part, $D_{st}^*(V)$ est un $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -module et la filtration est constituée de $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -modules ; d'autre part, $D_{st}^*(V)$ est muni d'une action de $Gal(K/K')$ qui est $\varphi \otimes Id$ -semilinéaire, induite par l'action de $G_{K'}$ définie par $(g \cdot f)(x) = gf(g^{-1}x)$ pour $g \in G_{K'}$, $f \in D_{st}^*(V)$ et $x \in V$. Il est donc naturel d'introduire la catégorie des $(\phi, N, K/K', E)$ -modules filtrés :

Définition 5.12.1. $(\phi, N, K/K', E)$ -modules filtrés

Un $(\phi, N, K/K', E)$ -module filtré de rang n est un $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -module D de rang n muni de :

- (i) une filtration $(Fil^i D_K)_{i \in \mathbb{Z}}$ sur $D_K = K \otimes_{K_0} D$ de sous- $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -modules qui est décroissante, exhaustive et séparée.
- (ii) un automorphisme $\varphi \otimes Id$ -semilinéaire ϕ .
- (iii) un endomorphisme $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -linéaire nilpotent N vérifiant $N\phi = p\phi N$.
- (iv) une action de $Gal(K/K')$ sur D qui est $\varphi \otimes Id$ -semilinéaire, qui commute avec le Frobenius ϕ et la monodromie N et qui respecte la filtration sur D_K .

Un **morphisme** de $(\phi, N, K/K', E)$ -modules filtrés est une application $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -linéaire qui commute avec ϕ , N et l'action de $Gal(K/K')$, et qui respecte les filtrations. On définit ainsi la catégorie des $(\phi, N, K/K', E)$ -modules filtrés.

Un $(\phi, N, K/K', E)$ -module filtré est dit **faiblement admissible** s'il est faiblement admissible en tant que (ϕ, N) -module sur K .

Ainsi, si V est une représentation potentiellement semi-stable de $G_{K'}$ sur E qui devient semi-stable sur G_K , alors $D_{st}^*(V)$ est un $(\phi, N, K/K', E)$ -module filtré faiblement admissible. Réciproquement, soit D un $(\phi, N, K/K', E)$ -module filtré faiblement admissible, et posons

$$V_{st}^*(D) = Hom_{\phi, N}(D, B_{st}) \cap Hom_{Fil}(D_K, B_{dR}).$$

C'est un E -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action de $G_{K'}$ définie par $(g \cdot f)(x) = gf(g^{-1}x)$, pour $g \in G_{K'}$, $f \in V_{st}^*(D)$ et $x \in D$. Comme dans les cas des représentations semi-stables à coefficients dans \mathbb{Q}_p , D_{st}^* et V_{st}^* définissent des anti-équivalences de catégories :

Théorème 5.12.2. (Une anti-équivalence de catégories supplémentaire)

Le foncteur D_{st}^ établit une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des $(\phi, N, K/K', E)$ -modules filtrés faiblement admissibles et celle des représentations de $G_{K'}$ à coefficients dans E qui deviennent semi-stables sur G_K , et V_{st}^* est le foncteur quasi-inverse.*

5.13 Théorie de Fontaine-Laffaille

Références : [FL82] et [BM02, section 3.1].

Nous avons vu que D_{cris}^* établit une anti-équivalence entre la catégorie des représentations cristallines de G_{K_0} sur \mathbb{Q}_p et la catégorie des ϕ -modules filtrés faiblement admissibles sur K_0 . Étant donnée une représentation galoisienne de G_{K_0} , on peut trouver un réseau stable sous l'action de G_{K_0} , ce qui fournit une représentation de G_{K_0} sur \mathbb{Z}_p . Étant donnés deux tels réseaux $\Gamma' \subseteq \Gamma$, on peut alors considérer le quotient Γ/Γ' , et obtenir ainsi une représentation de G_{K_0} dans un \mathbb{Z}_p -module de torsion. L'objectif de cette section est de construire des structures analogues dans les ϕ -modules filtrés sur K_0 .

Les réseaux stables dans les représentations galoisiennes correspondent à ce que l'on appelle des modules fortement divisibles :

Définition 5.13.1. (Modules fortement divisibles)

Un module fortement divisible est un $W(k)$ -module M libre de type fini muni de :

- (i) *une filtration décroissante $(Fil^i(M))_{i \in \mathbb{Z}}$ de sous- $W(k)$ -modules telle que $Fil^0(M) = M$, $Fil^i(M) = 0$ pour i assez grand et $M/Fil^i(M)$ n'a pas de p -torsion,*
- (ii) *d'une application semi-linéaire (par rapport au Frobenius de K_0) $\phi : M \rightarrow M$ telle que $\phi(Fil^i(M)) \subseteq p^i M$ pour tout i et $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{p^i} \phi(Fil^i(M)) = M$.*

Le théorème suivant met alors en évidence le lien entre les réseaux des représentations galoisiennes et les modules fortement divisibles :

Théorème 5.13.2. (Modules fortement divisibles et réseaux)

Le foncteur $Hom_{W(k), Fil, \phi}(-, A_{cris})$ est une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des modules fortement divisibles M de rang d vérifiant $Fil^p(M) = 0$ et la catégorie des réseaux stables dans une représentation cristalline de G_{K_0} de

dimension d ayant des poids de Hodge-Tate dans $[-p+1, 0]$. De plus, étant donnée une représentation cristalline V de G_{K_0} de dimension d ayant des poids de Hodge-Tate dans $[-p+1, 0]$, le foncteur précédent induit une bijection entre les réseaux stables dans V et les modules fortement divisibles M dans $D_{cris}^*(V)$ de rang d vérifiant $Fil^p(M) = 0$.

Les quotients de réseaux dans les représentations galoisiennes correspondent alors aux modules de Fontaine-Laffaille de torsion :

Définition 5.13.3. (Modules de Fontaine-Laffaille)

Soit $r \in \mathbb{N}$. On appelle **module de Fontaine-Laffaille de longueur r** un $W(k)$ -module de type fini muni de :

- (i) une filtration décroissante $(Fil^i(M))_{i \in \mathbb{Z}}$ de sous- $W(k)$ -modules telle que $Fil^0(M) = M$ et $Fil^{r+1}(M) = 0$.
- (ii) des applications semi-linéaires $\phi_i : Fil^i(M) \rightarrow M$ telles que $\phi_i|_{Fil^{i+1}(M)} = p\phi_{i+1}$ et $\sum_{i=0}^r \phi_i(Fil^i(M)) = M$.

Un **morphisme** de modules de Fontaine-Laffaille de longueur r est un morphisme de $W(k)$ -modules qui respecte les filtrations et qui commute avec les ϕ_i . On notera FL_{tor}^r la **catégorie des modules de Fontaine-Laffaille de torsion de longueur r** .

Supposons que $r \in [0, p-2]$. Soit $M \in FL_{tor}^r$, et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $p^n M = 0$. On pose

$$T_{cris}^*(M) = Hom_{W(k), Fil, \phi}(M, A_{cris}/p^n A_{cris}).$$

Le \mathbb{Z}_p -module ainsi construit ne dépend pas du choix de n , et il est muni d'une action de G_{K_0} définie par $g(f)(x) = g(f(x))$ pour $g \in G_{K_0}$ et $x \in M$. Il se trouve en fait que $T_{cris}^*(M)$ est une représentation cristalline de torsion de poids au plus r , au sens suivant :

Définition 5.13.4. (Représentations cristallines de torsion)

On appelle **représentation cristalline de torsion de poids au plus r** toute représentation de G_{K_0} qui s'écrit T/T' où $T' \subseteq T$ sont deux réseaux stables par G_{K_0} dans une représentation cristalline de G_{K_0} dont les poids de Hodge-Tate sont entre $-r$ et 0 .

Ainsi, T_{cris}^* est un foncteur contravariant de FL_{tor}^r dans la catégorie des représentations cristallines de torsion de poids au plus r . Le théorème fondamental de la théorie de Fontaine-Laffaille s'exprime alors de la manière suivante :

Théorème 5.13.5. (Théorème de Fontaine-Laffaille)

Rappelons que nous avons supposé que $r \in [0, p-2]$. Le foncteur contravariant T_{cris}^* est une anti-équivalence de catégories entre FL_{tor}^r et la catégorie des représentations cristallines de torsion de poids au plus r .

Fixons maintenant $r = p - 2$. Supposons que $k = \overline{\mathbb{F}_p}$, de sorte que $K_0 = \widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}$. Dans ce cas, on dispose d'une classification des modules de Fontaine-Laffaille de torsion de poids au plus $p - 2$ simples :

Proposition 5.13.6. (Modules de Fontaine-Laffaille simples)

Supposons que $k = \overline{\mathbb{F}_p}$. Pour $h > 0$ entier et $i : \mathbb{Z}/h\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \cap [0, p - 2]$, notons $M(h, i)$ le module de Fontaine-Laffaille de torsion de poids au plus $p - 2$ défini par :

- (i) $M(h, i) = \overline{\mathbb{F}_p}^{\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}}$ comme $W(\mathbb{F}_p)$ -module.
- (ii) Si l'on note $(e_m)_{m \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}}$ la base canonique de $M(h, i)$,

$$\text{Fil}^i(M(h, i)) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}, i(m) \geq i} \overline{\mathbb{F}_p} e_m.$$

- (iii) Pour $m \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$, $\phi_{i(m)}(e_m) = e_{m-1}$.

Les modules de Fontaine-Laffaille de torsion de poids au plus $p - 2$ simples sont exactement les $M(h, i)$ tels qu'il n'existe pas $m_0 \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z} - \{0\}$ vérifiant la relation $i(m + m_0) = i(m)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$. Pour un tel module de Fontaine-Laffaille, la représentation $(T_{\text{cris}}^*(M(h, i)) \otimes_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}_p})^{ss}$ de $I_p = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{nr})$ est isomorphe à :

$$\begin{pmatrix} \omega_h^{i_0 + pi_1 + \dots + p^{h-1}i_{h-1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_h^{i_1 + pi_2 + \dots + p^{h-2}i_{h-1} + p^{h-1}i_0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_h^{i_{h-1} + pi_0 + p^2i_1 + \dots + p^{h-1}i_{h-2}} \end{pmatrix}$$

où chaque coefficient diagonal est la puissance p -ième du suivant. De plus, les poids de Hodge-Tate de la représentation cristalline contenant des réseaux dont le quotient est $T_{\text{cris}}^*(M(h, i))$ sont $(-i_0, \dots, -i_{h-1})$.

La théorie de Fontaine-Laffaille nous a permis de définir des "structures entières" dans les ϕ -modules filtrés qui sont en correspondance avec les réseaux dans les représentations cristallines. Nous aimerions étendre cette théorie aux représentations potentiellement semi-stables. Cela est nettement plus délicat et fait l'objet de la section suivante.

5.14 La théorie de Christophe Breuil

Références : [Bre, section 4], [Bre02, section 2] et [EGH, section 3.1 et 3.2].

On reprend les notations de 5.12 et on suppose que K est une extension finie de \mathbb{Q}_p . Afin de construire une théorie intégrale pour les représentations semi-stables, nous

procédons comme dans la théorie de Fontaine-Laffaille, et donc la première étape consiste à trouver une structure dans les $(\phi, N, K/K', E)$ -modules filtrés correspondant aux réseaux sur \mathcal{O}_E stables sous l'action de $G_{K'}$ dans les représentations potentiellement semi-stables de $G_{K'}$. Commençons donc par définir ce que nous entendons par réseaux stables dans les représentations galoisiennes :

Définition 5.14.1. (Catégorie des réseaux stables)

La catégorie $\mathcal{O}_E\text{-Res}_{K/K'}^r$ est la catégorie dont les objets sont des \mathcal{O}_E -modules M libres de type fini munis d'une action continue de $G_{K'}$ tels que $M \otimes_{\mathcal{O}_E} E$ est une représentation de $G_{K'}$ qui devient semi-stable sur K avec des poids de Hodge-Tate dans $[-r, 0]$.

Supposons dans la suite que K/K' est modérément ramifiée de degré de ramification e et que K'/\mathbb{Q}_p est non ramifiée. Supposons de plus que K possède une uniformisante π telle que $\pi^e \in K'$, et notons $E(u) \in W(k)[u]$ le polynôme minimal de π sur K_0 (c'est un polynôme d'Eisenstein).

Exemple 5.14.2. Nous allons appliquer la théorie de Christophe Breuil au cas particulier suivant : un entier naturel d étant fixé, K' est l'unique extension non ramifiée de \mathbb{Q}_p de degré d , et $K = K'((-p)^{\frac{1}{p^d-1}})$, de sorte que $K_0 = K'$. Nous choisissons $\pi = (-p)^{\frac{1}{p^d-1}}$: c'est bien une uniformisante de K . Le degré de ramification de K/\mathbb{Q}_p est alors $e = p^d - 1$ et le polynôme $E(u)$ est le polynôme d'Eisenstein $u^{p^d-1} + p$.

Nous cherchons maintenant à construire une catégorie analogue à la catégorie des réseaux stables du côté de l'algèbre linéaire. La notion de $(\phi, N, K/K', E)$ -module filtré que nous avons définie dans les parties précédentes a un grand désavantage : la filtration n'est pas définie au même niveau que le Frobenius et la monodromie, ce qui rend la manipulation des $(\phi, N, K/K', E)$ -modules filtrés assez délicate. Nous allons donc remplacer de tels modules filtrés par une autre structure algébrique, sur laquelle la filtration est définie au même niveau que le Frobenius et la monodromie : pour ce faire, on ne pourra plus considérer des K_0 -espaces vectoriels, mais des S -modules, où S est un anneau nettement plus compliqué que K_0 : c'est le prix à payer.

Définition 5.14.3. (L'anneau S)

L'anneau topologique S est par définition la complétion p -adique de $W(k) \left[u, \frac{u^{ie}}{i!} \right]_{i \in \mathbb{N}}$, c'est à dire :

$$S = \varprojlim W(k) \left[u, \frac{u^{ie}}{i!} \right] / p^n W(k) \left[u, \frac{u^{ie}}{i!} \right].$$

Remarquons que, comme $E(u)$ est un polynôme d'Eisenstein, $\frac{E(u)^j}{j!} \in S$ pour tout $j \geq 0$. Nous pouvons munir S de quatre structures supplémentaires : une filtration, un Frobenius, une monodromie et une action de $Gal(K/K')$:

- (i) la filtration $(Fil^i S)_{i \in \mathbb{N}}$ de S est une filtration décroissante d'idéaux dont le i -ième terme est la complétion p -adique de l'idéal de S engendré par les $\frac{E(u)^j}{j!}$ pour $j \geq i$.
- (ii) le Frobenius de S est l'unique morphisme d'anneaux $\phi : S \rightarrow S$ continu φ -semilinéaire tel que $\phi(u) = u^p$ et $\phi\left(\frac{u^{ie}}{i!}\right) = \frac{u^{ie p}}{i!}$.
- (iii) la monodromie est l'unique dérivation $W(k)$ -linéaire continue $N : S \rightarrow S$ telle que $N(u) = -u$ et $N\left(\frac{u^{ie}}{i!}\right) = -ie\frac{u^{ie}}{i!}$.
- (iv) le groupe $Gal(K/K')$ agit sur S par isomorphismes d'anneaux continus et :

$$g \cdot \left(w_i \frac{u^i}{\left[\frac{i}{e}\right]!} \right) = g(w_i) \left(\frac{g(\pi)}{\pi} \right)^i \frac{u^i}{\left[\frac{i}{e}\right]!}.$$

Remarque 5.14.4. (Quelques propriétés immédiates de S)

- (i) On a $\phi(Fil^i S) \subseteq p^i S$ pour $i \leq p-1$ (on utilise bien sûr le fait que $E(u)$ est d'Eisenstein).
- (ii) On a $N\phi = p\phi N$.
- (iii) L'action de $Gal(K/K')$ commute avec le Frobenius et la monodromie, et

$$\forall g \in Gal(K/K'), g \cdot (E(u)) = E(u).$$

On note alors $S_{\mathcal{O}_E} = S \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E$ et $S_E = S \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$. On est maintenant en mesure de définir la catégorie des $(S, \phi, N, K/K', E)$ -modules filtrés, qui va remplacer la catégorie des $(\phi, N, K/K', E)$ -modules filtrés :

Définition 5.14.5. $((S, \phi, N, K/K', E)$ -modules filtrés)

Un $(S, \phi, N, K/K', E)$ -module filtré est un S_E -module libre de type fini \mathcal{D} muni de :

- (i) une filtration $(Fil^i \mathcal{D})_{i \in \mathbb{Z}}$ de sous- S_E -modules de \mathcal{D} décroissante, exhaustive, telle que, pour $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$, $(Fil^i S_E)(Fil^j \mathcal{D}) \subseteq Fil^{i+j} \mathcal{D}$.
- (ii) une application $\phi \otimes Id$ -semi-linéaire $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ dont le déterminant dans une base de \mathcal{D} sur $S_{\mathbb{Q}_p}$ est inversible.
- (iii) une application $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -linéaire $N : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ telle que $N\phi = p\phi N$, $N(sx) = N(s)x + sN(x)$ pour $s \in S_E$ et $x \in \mathcal{D}$, et $N(Fil^i \mathcal{D}) \subseteq Fil^{i-1} \mathcal{D}$ pour $i \in \mathbb{Z}$.
- (iv) une action $\phi \otimes Id$ -semi-linéaire de $Gal(K/K')$ sur \mathcal{D} qui commute avec ϕ et N et qui respecte la filtration.

Les $(S, \phi, N, K/K', E)$ -modules filtrés définissent une catégorie dont les morphismes sont les applications S_E -linéaires qui commutent avec ϕ , N et l'action de $Gal(K/K')$ et qui respectent les filtrations.

Nous pouvons maintenant définir une structure dans les $(S, \phi, N, K/K', E)$ -modules filtrés correspondant aux réseaux sur \mathcal{O}_E stables sous l'action de $G_{K'}$ dans les représentations potentiellement semi-stables de $G_{K'}$. Elle joue le même rôle que les modules fortement divisibles dans la théorie de Fontaine-Laffaille.

Définition 5.14.6. ($(\mathcal{O}_E, S, K/K')$ -modules fortement divisibles)

Soit $0 < r \leq p-2$ un entier. Un $(\mathcal{O}_E, S, K/K')$ -module fortement divisible de poids r est un $S_{\mathcal{O}_E}$ -module libre de type fini \mathcal{M} muni de :

- (i) un sous- $S_{\mathcal{O}_E}$ -module $Fil^r \mathcal{M}$ de \mathcal{M} contenant $(Fil^r S_{\mathcal{O}_E})\mathcal{M}$, et tel que $Fil^r \mathcal{M} \cap I\mathcal{M} = IFil^r \mathcal{M}$ pour tout idéal I de \mathcal{O}_E .
- (ii) une application $\phi \otimes Id$ -semi-linéaire $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ telle que le sous- $S_{\mathcal{O}_E}$ -module de \mathcal{M} engendré par $\phi(Fil^r(\mathcal{M}))$ est $p^r \mathcal{M}$.
- (iii) une application additive $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ telle que $N(sx) = N(s)x + sN(x)$ pour $s \in S_{\mathcal{O}_E}$ et $x \in \mathcal{M}$, et $N\phi = p\phi N$, et $E(u)N(Fil^r \mathcal{M}) \subseteq Fil^r \mathcal{M}$.
- (iv) une action $\phi \otimes Id$ -semi-linéaire de $Gal(K/K')$ qui commute avec ϕ et N et qui stabilise $Fil^r \mathcal{M}$.

Les $(\mathcal{O}_E, S, K/K')$ -modules fortement divisibles de poids r forment une catégorie, que l'on note $\mathcal{O}_E\text{-Mod}_{K/K'}^r$.

Comme dans la théorie de Fontaine-Laffaille, nous voulons à présent définir un foncteur $T_{st,0}^* : \mathcal{O}_E\text{-Mod}_{K/K'}^r \rightarrow \mathcal{O}_E\text{-Res}_{K/K'}^r$, qui sera en fait une anti-équivalence de catégories. Pour ce faire, il convient d'introduire un nouvel anneau topologique :

Définition 5.14.7. (L'anneau \widehat{A}_{st})

- (i) On appelle $\widehat{A}_{st,0}$ l'anneau $A_{cris} \left[\frac{X^i}{i!} \right]_{i \in \mathbb{N}}$.
- (ii) L'anneau \widehat{A}_{st} est la complétion p -adique de $\widehat{A}_{st,0}$:

$$\widehat{A}_{st} = \varprojlim \widehat{A}_{st,0}/p^n \widehat{A}_{st,0} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_n \frac{X^i}{i!} : a_i \in A_{cris}, a_i \rightarrow 0 \text{ pour la topologie } p\text{-adique} \right\}.$$

On rappelle que ϵ est un élément de R tel que $\epsilon^{(0)} = 1$ et $\epsilon^{(1)} \neq 1$, et que $[\epsilon]$ est son représentant de Teichmüller dans $W(R)$. Pour $g \in G_{K'}$, on appelle $\epsilon(g) = (\epsilon(g)^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ l'élément de R tel que $\epsilon(g)^{(n)} = \frac{g(\epsilon^{(n)})}{\epsilon^{(n)}}$. On peut alors définir sur \widehat{A}_{st} une filtration, un Frobenius, une monodromie et une action de $G_{K'}$:

- (i) la filtration est donnée par $Fil^i \widehat{A}_{st} = \sum_{j=0}^i (Fil^{m-j} A_{cris}) \frac{X^j}{j!} + \widehat{A}_{st} X^{i+1}$, pour $i \geq 0$.
- (ii) le Frobenius est l'unique morphisme d'anneaux $\phi : \widehat{A}_{st} \rightarrow \widehat{A}_{st}$ continu, semi-linéaire vis-à-vis du Frobenius de A_{cris} et tel que $\phi \left(\frac{X^i}{i!} \right) = \frac{((1+X)^{p-1})^i}{i!}$.
- (iii) la monodromie est l'unique morphisme d'anneaux $N : \widehat{A}_{st} \rightarrow \widehat{A}_{st}$ continu, A_{cris} -linéaire et tel que $N \left(\frac{X^i}{i!} \right) = \frac{(1+X)^i}{i!}$.

(iv) le groupe $G_{K'}$ agit par isomorphismes d'anneaux continus et

$$g \cdot \left(a \frac{X^i}{i!} \right) = (g \cdot a) \frac{([\epsilon(g)]X + [\epsilon(g)] - 1)^i}{i!},$$

pour $g \in G'_K$ et $a \in A_{cris}$.

Pour \mathcal{M} un $(\mathcal{O}_E, S, K/K')$ -module fortement divisible, on pose alors :

$$T_{st,0}^*(\mathcal{M}) = Hom_{S, Fil^r, \phi, N}(\mathcal{M}, \widehat{A}_{st}).$$

Pour $\lambda \in \mathcal{O}_E$, $g \in G_{K'}$, $f \in T_{st,0}^*(\mathcal{M})$ et $x \in \mathcal{M}$, on pose $(\lambda f)(x) = f(\lambda x)$ et $(gf)(x) = gf(g^{-1}x)$. De cette manière, $T_{st,0}^*(\mathcal{M})$ est un \mathcal{O}_E -module muni d'une action de $G_{K'}$. Comme nous l'avons déjà annoncé, l'intérêt du foncteur $T_{st,0}^*$ est le suivant :

Théorème 5.14.8. (Modules fortement divisibles et réseaux)

Le foncteur $T_{st,0}^*$ est une anti-équivalence de catégories entre $\mathcal{O}_E\text{-Mod}_{K/K'}^r$ et $\mathcal{O}_E\text{-Res}_{K/K'}^r$.

Il est temps maintenant de définir les structures de l'algèbre linéaire qui correspondent aux quotients de réseaux stables dans des représentations potentiellement semi-stables. Ainsi, tout comme on avait introduit les modules de Fontaine-Laffaille de torsion, on introduit les modules de Breuil :

Définition 5.14.9. (Modules de Breuil)

Soit \mathbb{F} le corps résiduel de E . Un **module de Breuil de poids r à coefficients dans \mathbb{F}** est un $(k \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F})[u]/u^{ep}$ -module libre de type fini muni de :

- (i) un sous- $(k \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F})[u]/u^{ep}$ -module \mathcal{M}_r de \mathcal{M} contenant $u^{er} \mathcal{M}$.
- (ii) une application $\phi_k \otimes Id$ -linéaire $\phi_r : \mathcal{M}_r \rightarrow \mathcal{M}$ (où $\phi_k : k[u]/u^{ep} \rightarrow k[u]/u^{ep}$ désigne la puissance p -ième) telle que $\phi_r(\mathcal{M}_r)$ engendre tout le $(k \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F})[u]/u^{ep}$ -module \mathcal{M} .
- (iii) une application $k \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}$ -linéaire $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ telle que $N(ux) = uN(x) - ux$ pour $x \in \mathcal{M}$, $u^e N(\mathcal{M}_r) \subseteq \mathcal{M}_r$ et $\phi_r(u^e N(x)) = cN(\phi_r(x))$ pour $x \in \mathcal{M}_r$, où c est l'image de $\frac{\phi(E(u))}{p} \in S$ dans $k[u]/u^{ep}$.
- (iv) une action de $Gal(K/K')$ par bijections additives vérifiant :

$$g \cdot (au^i m) = g(a) \left(\left(\frac{g(\pi)}{\pi} \right)^i \otimes 1 \right) u^i (g \cdot m),$$

pour $a \in k \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}$ et $m \in \mathcal{M}$, laissant \mathcal{M}_r fixe et compatible avec le Frobenius et la monodromie. On note $\mathbb{F}\text{-BrMod}_{K/K'}^r$ la catégorie des modules de Breuil de poids r à coefficients dans \mathbb{F} .

Nous voulons maintenant construire un foncteur $T_{st,p}$ de $\mathbb{F} - BrMod_{K/K'}^r$ vers la catégorie des représentations de $G_{K'}$ sur \mathbb{F} de dimension finie. Pour ce faire, nous avons besoin d'introduire un nouvel anneau \widehat{A} :

Définition 5.14.10. (L'anneau \widehat{A})

La $k[u]/u^{ep}$ -algèbre \widehat{A} est la somme amalgamée de :

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \widehat{A}_{st} \\ \downarrow & & \\ k[u]/u^{ep} & & \end{array}$$

Comme le morphisme $S \rightarrow k[u]/u^{ep}$ est surjectif, le morphisme $\widehat{A}_{st} \rightarrow \widehat{A}$ est aussi surjectif. Les structures que nous avons définies sur \widehat{A}_{st} permettent donc de munir \widehat{A} d'un idéal $Fil^r \widehat{A}$, de deux applications ϕ_r et N et d'une action de $G_{K'}$. Pour $\mathcal{M} \in \mathbb{F} - BrMod_{K/K'}^r$, on définit $T_{st,p}(\mathcal{M}) = Hom_{k[u]/u^{ep}, Fil^r, \phi_r, N}(\mathcal{M}, \widehat{A})$. C'est un \mathbb{F} -espace vectoriel que l'on peut munir d'une action de $G_{K'}$ définie par $(gf)(x) = g \cdot (f(g^{-1} \cdot x))$. Le foncteur $T_{st,p}$ permet alors de faire correspondre une représentation de $G_{K'}$ à une structure linéaire :

Proposition 5.14.11. (Fidélité de $T_{st,p}$)

Le foncteur $T_{st,p}$ est fidèle. De plus, pour $\mathcal{M} \in \mathbb{F} - BrMod_{K/K'}^r$, la dimension de $T_{st,p}^*(\mathcal{M})$ sur \mathbb{F} est égale au rang de \mathcal{M} sur $(k \otimes \mathbb{F})[u]/u^{ep}$. Si $\widehat{\mathcal{M}} \in \mathcal{O}_E - Mod_{K/K'}^r$ et \mathfrak{m}_E désigne l'idéal maximal de l'anneau des entiers de E , alors $\mathcal{M} = \widehat{\mathcal{M}}/\mathfrak{m}_E \widehat{\mathcal{M}} \otimes_{S_{\mathcal{O}_E}/\mathfrak{m}_E S_{\mathcal{O}_E}} (k \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F})[u]/u^{ep}$ est un objet de $\mathbb{F} - BrMod_{K/K'}^r$ tel que $T_{st,0}^*(\widehat{\mathcal{M}}) \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathbb{F} \cong T_{st,p}(\mathcal{M})$.

Cependant, dans toute la suite, ce n'est pas le foncteur $T_{st,p}$ qui va nous intéresser, mais un foncteur que l'on pourrait qualifier de "dual" :

Définition 5.14.12. (Le foncteur $T_{st,p}^*$)

Soit $\mathcal{M} \in \mathbb{F} - BrMod_{K/K'}^r$. On définit $T_{st,p}^*(\mathcal{M}) = T_{st,p}(\mathcal{M})^\vee(r)$.

Tout l'intérêt de ce foncteur vient de la proposition suivante :

Proposition 5.14.13. ($T_{st,p}^*$ et sous-structures)

Soit $\mathcal{M} \in \mathbb{F} - BrMod_{K/K'}^r$. Considérons une $G_{K'}$ -sous-représentation T de $T_{st,p}^*(\mathcal{M})$. Il existe un unique sous-module de Breuil \mathcal{M}' de \mathcal{M} tel que $T_{st,p}^*$ envoie l'injection de \mathcal{M}' dans \mathcal{M} sur l'injection de T dans $T_{st,p}^*(\mathcal{M})$.

Pour prouver la proposition précédente on montre qu'il existe un unique $\mathcal{M}^* \in \mathbb{F} - BrMod_{K/K'}^r$ tel que $T_{st,p}(\mathcal{M}^*) = T_{st,p}(\mathcal{M})$, et on se ramène à prouver un résultat similaire pour le foncteur $T_{st,p}$, résultat qui a été démontré par Xavier Caruso (voir la proposition 2.2.5 de [Car11]). Pour voir la construction de \mathcal{M}^* , se référer à la définition 3.2.8 de [EGH]. On remarque aussi que $\mathcal{M}^{**} = \mathcal{M}$.

5.15 Représentations de Weil-Deligne

Supposons que K est une extension finie de \mathbb{Q}_p . On dispose d'un isomorphisme $Gal(K^{nr}/K) \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ envoyant le Frobenius sur 1, et donc d'un morphisme surjectif $f : G_K \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$. Le noyau de ce morphisme est bien évidemment le sous-groupe d'inertie I_K de K , d'où une suite exacte :

$$1 \rightarrow I_K \rightarrow G_K \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow 1.$$

On appelle **groupe de Weil** le sous-groupe $f^{-1}(\mathbb{Z})$ de G_K : c'est en fait le sous-groupe engendré par I_K et par le Frobenius. On le note W_K .

Soit E un corps de caractéristique 0. On appelle **représentation de Weil-Deligne de K sur E** un couple (V, N) où V est un E -espace vectoriel discret de dimension finie muni d'une action de W_K tel que l'inertie I_K agit continûment et N est un endomorphisme nilpotent de V vérifiant :

$$gNg^{-1} = q^{f(g)}N,$$

pour $g \in W_K$ et $q = |k|$.

Supposons maintenant que E est une extension finie de \mathbb{Q}_p et considérons une représentation potentiellement semi-stable $\rho : G_K \rightarrow GL(V)$ de G_K sur un E -espace vectoriel V . Soit L une extension finie de K telle que V est une représentation semi-stable de G_L . Supposons que E contient la plus grande sous-extension non ramifiée L_0 de L . Posons $D = D_{st}(V|_{G_L})$. Pour $\sigma \in Hom(L_0, E)$, notons $D_\sigma = D \otimes_{L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E, \sigma} E$. On remarque que D est un $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -module libre de rang $\dim_E(V)$ muni d'une action de $Gal(L/K)$, et donc d'une action de W_K par le biais du morphisme $G_K \rightarrow Gal(L/K)$. Si h est tel que $q = p^h$, et ϕ et N désignent respectivement le Frobenius et la monodromie de D , on pose $w \cdot x = w\phi^{-hf(w)}(x)$ pour $x \in D$ et $w \in W_K$. Cela définit alors une action de W_K sur D . On peut alors munir chaque D_σ de l'action induite de W_K et de l'application induite par $N : D \rightarrow D$. Le couple (D_σ, N) est alors une représentation de Weil-Deligne de K sur E de dimension $\dim_E V$. Les représentations de Weil-Deligne ainsi obtenues sont indépendantes de σ à isomorphisme près. On appelle cette classe d'isomorphisme de représentations de Weil-Deligne **la représentation de Weil-Deligne associée à V** (ou à ρ), et on la note $WD(\rho)$.

5.16 Théorème fondamental : le type d'inertie (presque) détermine la représentation inertielle

Référence : [EGH, section 3.3]

Le théorème fondamental que nous utiliserons pour étudier l'ensemble des poids de Serre d'une représentation galoisienne permet (sous certaines conditions) de

déterminer (à un nombre fini de possibilités près) la restriction au groupe d'inertie I_p d'une représentation $\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{F}_p})$ si l'on connaît la représentation de Weil-Deligne associée à un relèvement $\tilde{\rho} : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{Q}_p})$ potentiellement semi-stable de ρ . Plus précisément,

Théorème 5.16.1. *Soit $\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{F}_p})$ une représentation irréductible possédant un relèvement $\tilde{\rho} : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{Q}_p})$ continu potentiellement semi-stable ayant pour poids de Hodge-Tate $-2, -1$ et 0 . Fixons a, b, c trois entiers tels que $a - b > 2$, $b - c > 2$ et $a - c < p - 3$.*

(i) *Si $WD(\tilde{\rho})|_{I_p} \cong \tilde{\omega}_1^a \oplus \tilde{\omega}_1^b \oplus \tilde{\omega}_1^c$, alors :*

$$\rho|_{I_p} \cong \tau((1 \ 2 \ 3), (a + a_0, c + a_2, b + a_1))$$

ou

$$\rho|_{I_p} \cong \tau((1 \ 2 \ 3), (a + 2 - a_2, b + 2 - a_1, c + 2 - a_0))$$

avec $(a_0, a_1, a_2) \in \{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (2, 1, 0)\}$.

(ii) *Si $WD(\tilde{\rho})|_{I_p} \cong \tilde{\omega}_3^{a+pb+p^2c} \oplus \tilde{\omega}_3^{b+pc+p^2a} \oplus \tilde{\omega}_3^{c+pa+p^2b}$, alors :*

$$\rho|_{I_p} \cong \tau((1 \ 2 \ 3), (a + a_0, c + a_2, b + a_1))$$

avec $(a_0, a_1, a_2) \in \{(0, 2, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 0)\}$ ou

$$\rho|_{I_p} \cong \tau((1 \ 2 \ 3), (a + a_0, b + a_2, c + a_1))$$

et $(a_0, a_1, a_2) \in \{(0, 1, 2), (0, 2, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 1), (1, 2, 0), (2, 0, 1), (2, 1, 0)\}$.

(iii) *Si $WD(\tilde{\rho})|_{I_p} \cong \tilde{\omega}_3^{c+pb+p^2a} \oplus \tilde{\omega}_3^{a+pc+p^2b} \oplus \tilde{\omega}_3^{b+pa+p^2c}$, alors :*

$$\rho|_{I_p} \cong \tau((1 \ 2 \ 3), (c + 2 - a_0, a + 2 - a_2, b + 2 - a_1))$$

avec $(a_0, a_1, a_2) \in \{(0, 2, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 0)\}$ ou

$$\rho|_{I_p} \cong \tau((1 \ 2 \ 3), (c + 2 - a_0, b + 2 - a_2, a + 2 - a_1))$$

et $(a_0, a_1, a_2) \in \{(0, 1, 2), (0, 2, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 1), (1, 2, 0), (2, 0, 1), (2, 1, 0)\}$.

Fixons une représentation ρ vérifiant les conditions du théorème. Nous allons prouver ce théorème, mais en ajoutant des conditions supplémentaires sur a, b, c : on supposera jusqu'à la fin de cette partie que $a - b > 3$, $b - c > 3$, $a - c < p - 4$, et qu'aucun des trois entiers $2a - b - c$, $2b - a - c$ et $2c - a - b$ n'est congru à un entier dans $[-3, 3]$ modulo $p - 1$. La preuve complète du théorème sans ces hypothèses supplémentaires se trouve dans l'article de Matthew Emerton, Toby Gee et Florian Herzig.

Pour établir le théorème, nous avons besoin de quelques résultats préliminaires.

Dans toute la suite, nous nous plaçons dans le cadre décrit dans l'exemple 5.14.2, avec $d = 3$.

Étape 1 : *Montrons que nous pouvons supposer qu'il existe une extension finie E de \mathbb{Q}_p telle que l'image de $\tilde{\rho}$ est contenue dans $GL_3(\mathcal{O}_E)$.*

On sait que $\tilde{\rho}$ est un morphisme continu. Considérons (E_n) une suite croissante dénombrable de sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ vérifiant $[E_n : \mathbb{Q}_p] < \infty$ et telle que $\overline{\mathbb{Q}_p} = \bigcup_n E_n$. On a alors $Im(\tilde{\rho}) = \bigcup_n (Im(\tilde{\rho}) \cap GL_3(E_n))$. D'après le théorème de Baire, cela impose qu'il existe n tel que l'intérieur de $Im(\tilde{\rho}) \cap GL_3(E_n)$ est non vide dans $Im(\tilde{\rho})$. On en déduit que $\tilde{\rho}^{-1}(Im(\tilde{\rho}) \cap GL_3(E_n))$ est ouvert et donc d'indice fini dans le groupe profini $G_{\mathbb{Q}_p}$. Cela impose immédiatement que nous pouvons trouver une extension finie E de \mathbb{Q}_p telle que $Im(\tilde{\rho}) \subseteq GL_3(E)$. On peut bien évidemment supposer que E contient la clôture normale de K . Soit maintenant $H = \tilde{\rho}^{-1}(GL_3(\mathcal{O}_E))$. C'est un ouvert de $G_{\mathbb{Q}_p}$, et donc $G_{\mathbb{Q}_p}/H$ est fini. Soient $g_1, \dots, g_s \in G_{\mathbb{Q}_p}$ des représentants de ce quotient. Soit alors $\Lambda' = \sum_{i=1}^s g_i \mathcal{O}_E^3$. On vérifie immédiatement que Λ' est un \mathcal{O}_E -réseau stable pour $\tilde{\rho}$. On peut donc supposer que $\tilde{\rho} : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow GL_3(\mathcal{O}_E)$. On notera \mathbb{F} le corps résiduel de E .

Étape 2 : *Calculons $\det \rho|_{I_{K_0}}$.*

Par hypothèse, dans les trois cas (i), (ii) et (iii), il existe des caractères $\chi_1, \chi_2, \chi_3 : G_{K_0} \rightarrow \mathcal{O}_E^\times$ tels que $WD(\tilde{\rho})|_{I_{K_0}} \cong \chi_1|_{I_{K_0}} \oplus \chi_2|_{I_{K_0}} \oplus \chi_3|_{I_{K_0}}$, et de plus χ_1, χ_2 et χ_3 sont des puissances de $\tilde{\omega}_3$ et $\chi_1\chi_2\chi_3 = \tilde{\omega}_1^{a+b+c}$. Par conséquent, $WD(\det \tilde{\rho})|_{I_{K_0}} = \chi_1\chi_2\chi_3$, d'où

$$WD(\det \tilde{\rho} \cdot \chi_1^{-1}\chi_2^{-1}\chi_3^{-1})|_{I_{K_0}} = 1.$$

Par conséquent, d'après la proposition 5.9.1(iv), cela impose que $\det \tilde{\rho}|_{G_{K_0}} \cdot \chi_1^{-1}\chi_2^{-1}\chi_3^{-1}$ est semi-stable. On déduit alors de 5.9.2 que ce caractère est cristallin. De plus, comme $C \otimes \tilde{\omega}_3 \cong C$, $\tilde{\omega}_3$ est de Hodge-Tate de poids de Hodge-Tate égal à 0, donc $\det(\tilde{\rho})|_{I_{K_0}}$ est aussi de Hodge-Tate, et comme $D_{HT}(\det \tilde{\rho} \cdot \chi_1^{-1}\chi_2^{-1}\chi_3^{-1}) \cong \Lambda^3(D_{HT}(\tilde{\rho})) \otimes D_{HT}(\chi_1^{-1}) \otimes D_{HT}(\chi_2^{-1}) \otimes D_{HT}(\chi_3^{-1})$, on déduit que le poids de Hodge-Tate de $\det \tilde{\rho}|_{G_{K_0}} \cdot \chi_1^{-1}\chi_2^{-1}\chi_3^{-1}$ est égal à -3 . On déduit alors de 5.9.2 que $\det \tilde{\rho}|_{I_{K_0}} \cdot \chi_1^{-1}\chi_2^{-1}\chi_3^{-1} = \chi^3$ (où χ désigne le caractère cyclotomique p -adique). On en déduit que :

$$\det \rho|_{I_{K_0}} = \omega_1^{a+b+c+3}.$$

Étape 3 : *Calculons $\rho|_{I_{K_0}}$ afin de pouvoir calculer $\det \rho|_{I_{K_0}}$ autrement.*

Le sous-groupe de ramification sauvage $Gal(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{nr})$ étant un pro- p -groupe, il agit trivialement, et donc $\rho|_{I_{\mathbb{Q}_p}}$ agit par le quotient $Gal(\mathbb{Q}_p^{nr}/\mathbb{Q}_p^{nr})$, qui est abélien. Donc $\rho|_{I_{\mathbb{Q}_p}}$ est somme de trois caractères $\theta_1, \theta_2, \theta_3 : I_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbb{F}^\times$. Si $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$, le groupe $Gal(\mathbb{Q}_p^{nr}/\mathbb{Q}_p)$ étant abélien, ρ serait somme directe de trois caractères, ce qui contredit l'irréductibilité. Donc θ_1, θ_2 et θ_3 ne sont pas tous égaux. Choisissons

maintenant $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_p^{nr}/\mathbb{Q}_p)$ tel que σ induit le Frobenius dans $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$, et soit $\tilde{\sigma} \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ tel que $\tilde{\sigma}|_{\mathbb{Q}_p^{nr}} = \sigma$. On vérifie alors immédiatement que, pour $\tau \in I_{\mathbb{Q}_p}$, $\tilde{\sigma}\tau\tilde{\sigma}^{-1}\tau^{-p} \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{mr})$. Par conséquent, l'ensemble $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ est stable par puissance p -ième. De plus, si x est un vecteur de l'espace sous-jacent de ρ tel que $\rho(g)x = \theta_1(g)x$ pour $g \in I_{\mathbb{Q}_p}$, alors $\rho(g)\rho(\tilde{\sigma})^{-1}x = \theta_1(g)^p\rho(\tilde{\sigma})^{-1}x$ et $\rho(g)\rho(\tilde{\sigma})^{-2}x = \theta_1(g)^{p^2}\rho(\tilde{\sigma})^{-2}x$ pour $g \in I_{\mathbb{Q}_p}$. Ainsi, par irréductibilité de ρ , la puissance p -ième agit transitivement sur $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$. On peut donc supposer sans perte de généralité que $\theta_2 = \theta_1^p$ et $\theta_3 = \theta_1^{p^2}$, et alors $\det(\rho)|_{I_{K_0}} = \theta_1^{p^2+p+1}$.

Allons un peu plus loin et étudions $\rho|_{G_{K_0}}$. On a vu que x , $\rho(\tilde{\sigma})^{-1}(x)$ et $\rho(\tilde{\sigma})^{-2}(x)$ forment une base qui diagonalise $\rho|_{I_{\mathbb{Q}_p}}$. Comme θ_1 , θ_2 et θ_3 sont distincts, dans cette base,

$$\rho(\tilde{\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $\rho(\tilde{\sigma}^3)$ est une matrice scalaire. On en déduit que, dans ce cas, $\rho|_{G_{K_0}}$ est somme directe de trois caractères $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3 : G_{K_0} \rightarrow \mathbb{F}^\times$ prolongeant θ_1, θ_2 et θ_3 .

Étape 4 : *Étudions les structures linéaires associées à ρ .*

D'après 5.14.8, il existe un $(\mathcal{O}_E, S, K/K')$ -module fortement divisible $\widehat{\mathcal{M}}$ de poids 2 tel que $T_{st,0}^*(\widehat{\mathcal{M}}) \cong \tilde{\rho}$. Posons $\mathcal{M}' = \widehat{\mathcal{M}}/\mathfrak{m}_e\widehat{\mathcal{M}} \otimes_{S_{\mathcal{O}_E}/\mathfrak{m}_E S_{\mathcal{O}_E}} (k \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F})[u]/u^{ep}$. La proposition 5.14.11 impose que \mathcal{M}' est un objet de $\mathbb{F}\text{-BrMod}_{K/K'}^2$, et que $T_{st,p}(\mathcal{M}') \cong \rho|_{G_{K_0}}$. Notons $\mathcal{M} = \mathcal{M}'^*$. On a alors $T_{st,p}^*(\mathcal{M}) \cong \rho|_{K_0}$.

Il convient maintenant de comprendre l'action de $\text{Gal}(K/K_0)$ sur \mathcal{M} . En fait, on peut prouver qu'il existe une base v_1, v_2, v_3 de \mathcal{M} sur $(k \otimes \mathbb{F})[u]/u^{ep}$ telle que $g \cdot v_i = (1 \otimes \chi_i(g))v_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $g \in \text{Gal}(K/K_0)$. Nous ne démontrons pas ce résultat ici : pour une preuve, se référer à la section 5 de [GS11].

Fixons une injection $\sigma_0 : k \hookrightarrow \mathbb{F}$, et notons ϕ le Frobenius sur k . On définit σ_1 et σ_2 par $\sigma_1 = \sigma_0 \circ \phi^{-1}$ et $\sigma_2 = \sigma_1 \circ \phi^{-1}$ et on pose $\sigma_3 = \sigma_0$. Pour $i \in \{0, 1, 2\}$, soit $e_i = \frac{1}{|k^\times|} \left(\sum_{x \in k^\times} x^{-1} \otimes \sigma_i(x) \right) \in k \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}$. On prouve alors aisément que les e_i sont idempotents, que $e_i e_j = 0$ pour $i \neq j$, que $\mathcal{M} = \bigoplus_i e_i \mathcal{M}$, que $e_i \mathcal{M} = \{m \in \mathcal{M} / \forall x \in k, (x \otimes 1)m = (1 \otimes \sigma_i(x))m\}$ et que $e_{i+1} = (\phi \otimes 1)e_i$. Remarquons que toutes ces propriétés sont vraies pour n'importe quel module de Breuil (et pas seulement pour \mathcal{M}) : nous utiliserons ces résultats pour un autre module de Breuil dans l'étape 5.

Plaçons-nous maintenant dans le cas (i). On dispose alors d'une base v_1, v_2, v_3 de \mathcal{M} telle que $g \cdot v_1 = (1 \otimes \omega_1(g)^a)v_1 = (\omega_1(g)^a \otimes 1)v_1$, $g \cdot v_2 = (1 \otimes \omega_1(g)^b)v_2 = (\omega_1(g)^b \otimes 1)v_2$, $g \cdot v_3 = (1 \otimes \omega_1(g)^c)v_3 = (\omega_1(g)^c \otimes 1)v_3$. Dans ce cas, on note $\alpha = (1 + p + p^2)a$, $\beta = (1 + p + p^2)b$ et $\gamma = (1 + p + p^2)c$.

Considérons maintenant le cas (ii). On dispose alors d'une base v_1, v_2, v_3 de \mathcal{M}

telle que $g \cdot v_1 = (1 \otimes \omega_3(g)^{a+pb+p^2c})v_1$, $g \cdot v_2 = (1 \otimes \omega_3(g)^{b+pc+p^2a})v_2$, $g \cdot v_3 = (1 \otimes \omega_3(g)^{c+pa+p^2b})v_3$. On a alors :

$$\begin{aligned} g \cdot (e_0v_1) &= (\omega_3(g)^{a+pb+p^2c} \otimes 3)e_0v_1, \\ g \cdot (e_0v_2) &= (\omega_3(g)^{b+pc+p^2a} \otimes 1)e_0v_2, \\ g \cdot (e_0v_3) &= (\omega_1(g)^{c+pa+p^2b} \otimes 1)e_0v_3, \\ g \cdot (e_1v_1) &= (\omega_3(g)^{c+pa+p^2b} \otimes 3)e_1v_1, \\ g \cdot (e_1v_2) &= (\omega_3(g)^{a+pb+p^2c} \otimes 1)e_1v_2, \\ g \cdot (e_1v_3) &= (\omega_1(g)^{b+pc+p^2a} \otimes 1)e_1v_3, \\ g \cdot (e_2v_1) &= (\omega_3(g)^{b+pc+p^2a} \otimes 3)e_2v_1, \\ g \cdot (e_2v_2) &= (\omega_3(g)^{c+pa+p^2b} \otimes 1)e_2v_2, \\ g \cdot (e_2v_3) &= (\omega_1(g)^{a+pb+p^2c} \otimes 1)e_2v_3. \end{aligned}$$

Donc, dans la base $w_1 = e_0v_1 + e_1v_2 + e_2v_3$, $w_2 = e_0v_2 + e_1v_3 + e_2v_1$, $w_3 = e_0v_3 + e_1v_1 + e_2v_2$, le groupe $Gal(K/K_0)$ agit par les caractères $\omega_3^{a+pb+p^2c} \otimes 1$, $\omega_3^{b+pc+p^2a} \otimes 1$ et $\omega_3^{c+pa+p^2b} \otimes 1$. On note dans ce cas $\alpha = a + pb + p^2c$, $\beta = b + pc + p^2a$ et $\gamma = c + pa + p^2b$.

Dans le cas (iii), on trouve de même une base sur laquelle $Gal(K/K_0)$ agit par les caractères $\omega_3^{a+pc+p^2b} \otimes 1$, $\omega_3^{b+pa+p^2c} \otimes 1$ et $\omega_3^{c+pb+p^2a} \otimes 1$. On pose alors $\alpha = a + pc + p^2b$, $\beta = b + pa + p^2c$ et $\gamma = c + pb + p^2a$.

Par conséquent, dans tous les cas, nous avons trouvé α , β et γ tels que $Gal(K/K_0)$ agit par les caractères ω_3^α , ω_3^β et ω_3^γ sur \mathcal{M} .

Étape 5 : *Étudions les structures linéaires associées à θ'_1 .*

D'après la proposition 5.14.13, il existe $\mathcal{N} \in \mathbb{F}\text{-BrMod}_{K/K'}^2$ sous-objet de rang 1 de \mathcal{M} tel que l'image de l'inclusion $\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}$ par $T_{st,p}^*$ est l'inclusion $\theta'_1 \hookrightarrow \rho|_{G_{K_0}}$.

Le module \mathcal{N} étant libre de rang 1, on peut écrire $\mathcal{N} = ((k \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F})[u]/u^{ep})n$ pour un élément $n \in \mathcal{N}$. Pour chaque $i \in \{0, 1, 2\}$, il existe r_i tel que $e_i\mathcal{N}_2 = u^{r_i}e_i\mathcal{N}$. Par conséquent, $\mathcal{N}_2 = u^{r_0}e_0\mathcal{N} \oplus u^{r_1}e_1\mathcal{N} \oplus u^{r_2}e_2\mathcal{N}$, et comme $u^{2e}\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_2$, les r_i sont inférieurs ou égaux à $2e$. Quant au Frobenius, il est entièrement déterminé par l'image de $u^{r_0}e_0n + u^{r_1}e_1n + u^{r_2}e_2n$, et comme l'image de ϕ_2 doit engendrer \mathcal{N} , on déduit que $\phi_2(u^{r_0}e_0n + u^{r_1}e_1n + u^{r_2}e_2n) = \lambda n$ pour un certain $\lambda \in (k \otimes \mathbb{F})^\times$. Concernant l'action de $Gal(K/K')$ (qui est entièrement déterminée par l'action sur n), on sait que, pour chaque $g \in Gal(K/K')$ et chaque $i \in \{0, 1, 2\}$, g induit une bijection additive de $e_i\mathcal{N}$ dans lui-même, et donc il existe $f_i(g) \in k^\times$ tel que $g \cdot (e_i n) = f_i(g)e_i n$. On vérifie immédiatement que les f_i sont des caractères, et comme k/\mathbb{F}_p est de degré 3, ce sont des puissances de ω_3 . Il existe donc des entiers k_1, k_2, k_3 tels que $g \cdot n = ((\omega_3^{k_0}(g) \otimes 1)e_0 + (\omega_3^{k_1}(g) \otimes 1)e_1 + (\omega_3^{k_2}(g) \otimes 1)e_2) n$. La

condition $\phi_2(g \cdot (u^{r_0}e_0n + u^{r_1}e_1n + u^{r_2}e_2n)) = g \cdot \phi_2(u^{r_0}e_0n + u^{r_1}e_1n + u^{r_2}e_2n)$ entraîne que $k_1 \equiv p(k_0 + r_0) \pmod{e}$, $k_2 \equiv p(k_1 + r_1) \pmod{e}$ et $k_0 \equiv p(k_2 + r_2) \pmod{e}$. Finalement, pour la monodromie, on remarque facilement que $N(\mathcal{N}_2) \subseteq \mathcal{N}_2$, et donc :

$$\begin{aligned} c\lambda N(n) &= cN(\phi_2(u^{r_0}e_0n + u^{r_1}e_1n + u^{r_2}e_2n)) \\ &= \phi_2(u^e N(u^{r_0}e_0n + u^{r_1}e_1n + u^{r_2}e_2n)) \\ &= u^{ep} \phi_2(N(u^{r_0}e_0n + u^{r_1}e_1n + u^{r_2}e_2n)) = 0. \end{aligned}$$

Comme c et λ sont inversibles, on déduit que $N(n) = 0$.

À partir de cette description de \mathcal{N} , il est possible de calculer $T_{st,p}^*(\mathcal{N})|_{I_{K_0}} \cong \theta_1|_{I_{K_0}}$.

En fait, on peut prouver que $T_{st,p}^*(\mathcal{N})|_{I_{K_0}} \cong \sigma_0 \circ \omega_3^{k_0 + \frac{p(r_0p^2 + r_1p + r_2)}{p^3 - 1}}$. Nous ne démontrons pas ce résultat ici : se référer au lemme 3.3.2 de [EGH].

Étape 6 : Calculons $\theta'_1|_{I_{K_0}} = \theta_1$ et concluons.

On remarque que $\mathcal{N}/u\mathcal{N}$ s'injecte dans $\mathcal{M}/u\mathcal{M}$. D'après l'étape 4, $\mathcal{M}/u\mathcal{M}$ est une représentation de $Gal(K/K_0)$ sur k qui est somme directe de caractères dans $\{\omega_3^\alpha, \omega_3^\beta, \omega_3^\gamma\}$. D'après l'étape 5, $\mathcal{N}/u\mathcal{N}$ est une représentation de $Gal(K/K_0)$ sur k qui est somme directe des trois caractères $\omega_3^{k_0}, \omega_3^{k_1}, \omega_3^{k_2}$ avec la multiplicité $[\mathbb{F} : k]$. On peut donc supposer que $\{k_0, k_1, k_2\} \subseteq \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Plaçons-nous dans le cas (i). On pose $k_i = (1 + p + p^2)x_i$ avec $x_i \in \{a, b, c\}$. Comme $0 \leq r_i \leq 2e$ et $r_i \equiv (1 + p + p^2)(x_{i+1} - x_i) \pmod{e}$, les conditions sur a, b, c imposent que l'on peut écrire $r_i = (1 + p + p^2)x_i + a_i e$ avec $a_i \in \{0, 1, 2\}$. On déduit alors que $\theta'_1|_{I_{K_0}} = \theta_1 = \omega_3^{(x_0 + a_0) + p(x_2 + a_2) + p^2(x_1 + a_1)}$. Donc, comme $\det \rho|_{I_{K_0}} = \theta_1^{1+p+p^2} = \omega_3^{(p^2+p+1)(a+b+c+3)}$, on obtient la congruence :

$$x_0 + x_1 + x_2 + a_0 + a_1 + a_2 \equiv a + b + c + 3 \pmod{p-1}.$$

Les hypothèses supplémentaires que nous avons imposées (mais qui ne sont pas nécessaires pour que le théorème soit vrai) entraînent que $\{x_0, x_1, x_2\} = \{a, b, c\}$, et on en déduit que $a_0 + a_1 + a_2 = 3$. Les différentes possibilités ainsi obtenues prouvent le théorème dans le cas (i).

Les deux autres cas sont tout à fait analogues.

6 Relèvements de représentations et opérateurs de Hecke

Plaçons-nous dans le contexte général décrit en section 4.1. Soit $\rho : G_F \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{F}_p})$ une représentation continue. Supposons que ρ soit automorphe de poids F_a , a étant

un poids restreint global, et fixons une place w de F divisant p . Notons $v = w|_{F^+}$ et soit π une uniformisante de \mathcal{O}_{F_w} . Par définition, il existe un sous-groupe ouvert compact U de $G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty,p}) \times \prod_{v'|p} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_{v'}^+})$ non ramifié en p et une partie cofinie \mathcal{P} de \mathcal{P}_U ne contenant que des places où ρ est non ramifiée tels que, si \mathfrak{m} désigne l'idéal maximal de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ associé à la représentation ρ , on a $S(U, F_a)_{\mathfrak{m}} \neq 0$. Comme U est non ramifié en p , on peut écrire $U = \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_v^+}) \times U^v$, où U^v est un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty,p}) \times \prod_{v'|p, v' \neq v} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_{v'}^+})$. Ces notations seront conservées tout au long de cette partie.

Dans cette partie, nous allons tenter de construire des relèvements en caractéristique zéro $\tilde{\rho} : G_{F_w} \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{Q}_p})$ de $\rho|_{G_{F_w}}$. Plus précisément, nous allons voir que si $W_w(\rho)$ est non vide (c'est-à-dire si nous disposons d'un poids local V tel $S(V)_{\mathfrak{m}} \neq 0$), alors de tels relèvements existent, sont de Hodge-Tate et nous pourrions de plus contrôler leurs poids de Hodge-Tate. Lorsque nous disposerons d'un peu plus d'informations sur les éléments de $W_w(\rho)$, nous pourrions même construire des relèvements potentiellement semi-stables et nous décrirons explicitement leurs types d'inertie.

Pour ce faire, nous procédons en deux étapes :

- (I) Dans un premier temps, nous travaillons en caractéristique 0. Nous introduisons un sous-espace \tilde{S} des formes automorphes constitué de fonctions localement algébriques (c'est-à-dire données par des expressions polynômiales), et nous remplaçons dans notre problème S par \tilde{S} . Plus précisément, nous verrons que s'il existe des $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -modules \tilde{V} (en caractéristique 0) tels que $((\tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \tilde{S})^{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})})_{\mathfrak{m}} \neq 0$, alors il existe des relèvements potentiellement semi-stables $\tilde{\rho} : G_{F_w} \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{Q}_p})$ de $\rho|_{G_{F_w}}$ et nous pourrions de plus contrôler leurs poids de Hodge-Tate ainsi que leurs types d'inertie. Pour certains modules \tilde{V} particuliers, nous pourrions même construire des relèvements cristallins. Dans ces cas, nous construirons de plus une algèbre de Hecke agissant sur $((\tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \tilde{S})^{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})})_{\mathfrak{m}}$ et nous contrôlerons l'action du Frobenius de $D_{cris}(\tilde{\rho})$ à l'aide des valeurs propres de certains opérateurs de Hecke.
- (II) Dans un deuxième temps, nous passerons de la caractéristique 0 à la caractéristique p , c'est-à-dire que nous montrerons que (I) entraîne l'existence de relèvements de $\rho|_{G_{F_w}}$ lorsque l'on suppose qu'il existe des poids de Serre locaux V (en caractéristique p) tels que $S(V)_{\mathfrak{m}} \neq 0$. Nous construirons de plus une algèbre de Hecke $\mathcal{H}(V)$ agissant sur $S(V)_{\mathfrak{m}}$ et nous verrons que certains opérateurs de Hecke agissent de manière nilpotente.

6.1 Actions localement algébriques et formes automorphes

Comme nous l'avons déjà annoncé, nous commençons en définissant la notion de fonction localement algébrique puis nous introduisons un sous-espace \tilde{S} des formes

automorphes constitué de fonctions localement algébriques.

Soit H un sous-groupe ouvert de $GL_3(\overline{\mathbb{Q}_p})$. On dit qu'une fonction $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ est **localement algébrique** si tout élément de H admet un voisinage ouvert U tel qu'il existe $\phi \in \overline{\mathbb{Q}_p}[X_{ij} : i, j \in \{1, 2, 3\}] \left[\frac{1}{\det(X_{ij})} \right]$ vérifiant $f(h) = \phi(h)$ pour $h \in U$. Pour V un $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -module libre de type fini muni d'une action de H , on dit que l'action de H sur V est **localement algébrique** si, pour tout $v \in V$ et tout $\varphi \in V^\vee$, la fonction $h \mapsto \varphi(hv)$ est localement algébrique.

Étant donné un $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -module W muni d'une action de $\prod_{v'|p} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_{v'}^+})$ telle que $\mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_v^+})$ agit trivialement, on appelle $S^{lalg}(U^v, W)$ le sous-espace de $S(U^v, W)$ constitué des fonctions f telles que, pour tout $\gamma \in G(\mathbb{A}_{F_v^+}^\infty)$ et tout $\varphi \in W^\vee$, la fonction $G(F_v^+) \rightarrow \overline{\mathbb{Z}_p}, g \mapsto \varphi(f(\gamma g))$ est localement algébrique.

Soit $w' \in \mathcal{P}_p^F$, et notons $v' = w'|_{F^+}$. Rappelons que, dans la partie 3.3, nous avons défini un $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -module libre de type fini $W_{a_{w'}} = M_{a_{w'}}(\mathcal{O}_{F_{w'}}) \otimes_{\mathcal{O}_{F_{w'}}} \overline{\mathbb{Z}_p}$ muni d'une action de $GL_3(\mathcal{O}_{F_{w'}})$, et donc de $\mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_{v'}^+})$ grâce à l'isomorphisme $\iota_{w'}$. On remarque que les $\overline{\mathbb{Z}_p}[\mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_{v'}^+})]$ -modules $W_{a_{w'}}$ et $W_{a_{w'c}}$ sont isomorphes et donc le $\overline{\mathbb{Z}_p}[\mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_{v'}^+})]$ -module $W_{a_{w'}}$ ne dépend que de v' : on le note $W_{a_{v'}}$. Ainsi, le $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -module $\bigotimes_{v'|p, v' \neq v} W_{a_{v'}}$ est muni d'une action de $\prod_{v'|p} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_{v'}^+})$ telle que $\mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_v^+})$ agit trivialement et on peut définir :

$$\tilde{S} = S^{lalg} \left(U^v, \bigotimes_{v' \neq v} W_{a_{v'}} \right).$$

C'est un $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -module muni d'une action de $GL_3(F_w)$. De plus, \tilde{S} est un sous-espace de $S \left(U^v, \bigotimes_{v' \neq v} W_{a_{v'}} \right)$ stable sous l'action de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$. Par conséquent, \tilde{S} est muni d'actions de $GL_3(F_w)$ et de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ qui commutent.

Étant donné un $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -module \tilde{V} muni d'une action de $GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$, on note :

$$\tilde{S}(\tilde{V}) = (\tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \tilde{S})^{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})}.$$

Dans le cas $\tilde{V} = W_\lambda$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{Z}_+^3$, comme $W_\lambda \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p}$ est muni d'une action de $GL_3(F_w)$, l'algèbre de Hecke $\overline{\mathbb{Z}_p}[GL_3(\mathcal{O}_{F_w}) \backslash GL_3(F_w) / GL_3(\mathcal{O}_{F_w})]$ agit sur le $\overline{\mathbb{Q}_p}$ -espace vectoriel $\tilde{S}(W_\lambda \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})$. Les trois opérateurs de Hecke suivants joueront un rôle important dans la suite :

$$\tilde{T}_{1,w} = \left[GL_3(\mathcal{O}_{F_w}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} GL_3(\mathcal{O}_{F_w}) \right],$$

$$\tilde{T}_{2,w} = \left[GL_3(\mathcal{O}_{F_w}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} GL_3(\mathcal{O}_{F_w}) \right],$$

$$\tilde{T}_{3,w} = \left[GL_3(\mathcal{O}_{F_w}) \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} GL_3(\mathcal{O}_{F_w}) \right].$$

En fait, les valeurs propres de ces opérateurs permettront de mieux comprendre l'action du Frobenius sur $D_{cris}(\tilde{\rho})$ pour certains relèvements $\tilde{\rho}$ de ρ .

6.2 Étape I : en caractéristique 0

Comme nous l'avons déjà annoncé, nous commençons par aborder le problème en caractéristique 0 : on s'intéresse donc à \tilde{S} au lieu de S . L'objectif de cette partie est double. D'une part, nous voulons montrer que, lorsque $\tilde{S}(\tilde{V})_{\mathfrak{m}} \neq 0$ pour certains $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -modules \tilde{V} , la restriction $\rho|_{G_{F_w}}$ admet des relèvements $\tilde{\rho} : G_{F_w} \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{Q}_p})$ qui sont, selon les cas, potentiellement semi-stables ou cristallins, et dont nous connaissons les poids de Hodge-Tate. D'autre part, nous voulons comprendre les liens entre les actions de $\tilde{T}_{1,w}$, $\tilde{T}_{2,w}$, $\tilde{T}_{3,w}$ et ces relèvements : plus précisément, nous allons voir que l'action du Frobenius sur $D_{cris}(\tilde{\rho})$ est profondément liée aux valeurs propres des opérateurs $\tilde{T}_{j,w}$ ($j \in \{1, 2, 3\}$). Mais avant de traiter ces deux questions, nous aurons besoin de quelques lemmes techniques :

Lemme 6.2.1. (Compatibilités techniques entre S^{sm} et S^{lalg})

(i) Soient \tilde{V} un $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -module libre de type fini muni d'une action de $GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$ localement algébrique et M un $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -module libre de type fini muni d'une action de $\prod_{v'|p, v' \neq v} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_{v'}^+})$. On dispose alors d'un isomorphisme naturel

$$(\tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} S^{lalg}(U^v, M))^{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})} \rightarrow S(U, \tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} M)$$

compatible avec l'action de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$.

(ii) Soient V un $\overline{\mathbb{F}_p}$ -module libre de type fini muni d'une action continue de $GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$ et M un $\overline{\mathbb{F}_p}$ -module muni d'une action de $\prod_{v'|p, v' \neq v} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_{v'}^+})$. On dispose alors d'un isomorphisme naturel

$$(V \otimes_{\overline{\mathbb{F}_p}} S^{sm}(U^v, M))^{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})} \rightarrow S(U, V \otimes_{\overline{\mathbb{F}_p}} M)$$

compatible avec l'action de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$.

(iii) On suppose que U est suffisamment petit, c'est-à-dire qu'il existe une place finie v' de F^+ telle que le seul élément d'ordre fini de la projection de U sur $G(F_{v'})$ est l'identité. Dans ce cas, le morphisme naturel

$$\tilde{S} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p} \rightarrow S^{sm} \left(U^v, \left(\bigotimes_{v'|p, v' \neq v} W_{a_{v'}} \right) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p} \right)$$

est un isomorphisme compatible avec les actions de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ et de $GL_3(F_w)$.

Démonstration.

(i) Considérons l'application $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -linéaire :

$$\begin{aligned} \eta : \tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} S(U^v, M) &\rightarrow S(U^v, \tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} M) \\ x \otimes f &\mapsto (\eta(f) : g \mapsto x \otimes f(g)). \end{aligned}$$

C'est en fait un isomorphisme qui commute avec l'action de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$.
On dispose donc d'une injection :

$$\tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} S^{lalg}(U^v, M) \rightarrow S(U^v, \tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} M).$$

Le groupe $GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$ agit sur $\tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} S^{lalg}(U^v, M)$ par $\gamma \cdot (x \otimes f) = (\gamma x) \otimes (\gamma \cdot f)$ pour $\gamma \in GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$. Par conséquent, pour $x_i \in \tilde{V}$ et $f_i \in S^{lalg}(U^v, M)$, si

$$\sum_i x_i \otimes f_i \in (\tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} S^{lalg}(U^v, M))^{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})},$$

alors

$$\sum_i (\gamma x_i) \otimes f_i(g\gamma) = \sum_i x_i \otimes f_i(g)$$

pour tous $g \in G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)$ et $\gamma \in GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$, et donc

$$\eta \left(\sum_i x_i \otimes f_i \right) (g\gamma) = \sum_i x_i \otimes f_i(g\gamma) = \gamma^{-1} \left(\sum_i x_i \otimes f_i(g) \right).$$

Cela impose que η induit une injection $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -linéaire :

$$\eta' : (\tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} S^{lalg}(U^v, M))^{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})} \hookrightarrow S(U, \tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} M)$$

compatible avec l'action de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$.

Reste donc à établir la surjectivité de η' . Soit $f \in S(U, \tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} M)$. Considérons e_1, \dots, e_d une base de \tilde{V} , et écrivons $\eta^{-1}(f) = \sum_i e_i \otimes f_i$ pour $f_i \in S(U^v, M)$. Montrons que $f_i \in S^{lalg}(U^v, M)$. Fixons $g \in G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)$ et $m^\vee \in M^\vee$. Pour $\gamma \in GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$, notons $\varphi_i(\gamma) = \langle f_i(g\gamma), m^\vee \rangle$. Soit finalement $e_1^\vee, \dots, e_d^\vee$ la base duale de e_1, \dots, e_d . On a alors, pour $\gamma \in GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$ et $1 \leq j \leq d$:

$$\begin{aligned} \varphi_i(\gamma) &= \langle f(g\gamma), e_i^\vee \otimes m^\vee \rangle \\ &= \langle \gamma^{-1} f(g), e_i^\vee \otimes m^\vee \rangle \\ &= \sum_j \langle f_j(g), m^\vee \rangle \langle \gamma^{-1} e_j, e_i^\vee \rangle. \end{aligned}$$

Par conséquent, comme l'action de $GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$ sur \tilde{V} est localement algébrique, φ_i est aussi localement algébrique, et donc les f_i sont localement algébriques. On vérifie finalement sans difficulté que $\eta^{-1}(f)$ est fixé par $GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$ en utilisant que $\sum_i x_i \otimes f_i(g\gamma) = \gamma^{-1}(\sum_i x_i \otimes f_i(g))$.

Par conséquent, η' est bien surjective et donc un isomorphisme.

(ii) On procède de façon tout à fait analogue. Considérons l'application $\overline{\mathbb{F}_p}$ -linéaire :

$$\begin{aligned} \eta : V \otimes_{\overline{\mathbb{F}_p}} S(U^v, M) &\rightarrow S(U^v, V \otimes_{\overline{\mathbb{F}_p}} M) \\ x \otimes f &\mapsto (\eta(f) : g \mapsto x \otimes f(g)). \end{aligned}$$

C'est en fait un isomorphisme qui commute avec l'action de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ et comme avant, elle induit :

$$\eta' : (V \otimes_{\overline{\mathbb{F}_p}} S^{sm}(U^v, M))^{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})} \hookrightarrow S(U, V \otimes_{\overline{\mathbb{F}_p}} M).$$

Reste donc à prouver la surjectivité. Soit $f \in S(U, V \otimes_{\overline{\mathbb{F}_p}} M)$. Considérons e_1, \dots, e_d une base de V , et écrivons $\eta^{-1}(f) = \sum_i e_i \otimes f_i$ pour $f_i \in S(U^v, M)$. Montrons que $f_i \in S^{sm}(U^v, M)$. Pour $\gamma \in GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$ vérifiant $\gamma^{-1}e_i = e_i$ pour tout i , on a immédiatement pour $g \in G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)$:

$$\sum_i e_i \otimes f_i(g\gamma) = \sum_i e_i \otimes f_i(g),$$

et donc $f_i(g\gamma) = f_i(g)$. Comme l'action de $GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$ sur V est continue, cela impose que chaque f_i est fixé par un sous-groupe ouvert de $GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$, et donc $f_i \in S^{sm}(U^v, M)$. On vérifie de plus sans difficulté que $\eta^{-1}(f)$ est fixé par $GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$, et la surjectivité de η' en découle.

(iii) Nous laissons la preuve de ce lemme au lecteur. Même si elle n'est pas analogue aux précédentes, elle est de nature similaire. On pourra aussi aller voir [EGH]. \square

Remarque 6.2.2. (Ouverts suffisamment petits)

(i) L'utilité de la notion d'ouvert suffisamment petit vient du fait suivant : si U est suffisamment petit, alors $S(U, W) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} A \cong S(U, W \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} A)$ pour toute $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -algèbre A (la preuve est aisée, on pourra se référer à la section 7.1.2 de [EGH]).

(ii) On remarque que, comme $S(U, F_a)_\mathfrak{m} \neq 0$, on a aussi $S(U', F_a)_\mathfrak{m} \neq 0$ pour tout sous-groupe ouvert U' de U . On peut donc supposer que U est suffisamment petit. Nous faisons cette hypothèse dans toute la suite.

Comme $F_{a_{v'}}$ s'injecte dans $W_{a_{v'}} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}$ pour toute place v' de F^+ divisant p , (iii) entraîne que :

Corollaire 6.2.3. On dispose d'une injection $S \hookrightarrow \tilde{S} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}$ compatible avec les actions de \mathbb{T} et $GL_3(F_w)$.

Afin de construire des relèvements de ρ , il convient d'associer des représentations galoisiennes à des représentations adéliques dans les espaces de formes automorphes :

Théorème 6.2.4. (Représentations galoisiennes et représentations adéliques)

Notons $W_a = \bigotimes_{v'} W_{a_{v'}}$ où v' décrit les places de F^+ divisant p . Soit r une sous- $G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)$ -représentation irréductible de $S_{\text{lim}}(W_a \otimes \overline{\mathbb{Q}_p})$. Il existe alors une représentation continue semi-simple $\rho_r : G_F \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{Q}_p})$ telle que :

- (i) La représentation ρ_r est de de Rham, et les poids de Hodge-Tate de $\rho_r|_{G_{F_w}}$ sont $(a_{w,1} + 2, a_{w,2} + 1, a_{w,3})$.
- (ii) S'il existe un ouvert compact U' non ramifié en p tel que $r^{U'} \neq 0$, alors ρ_r est cristalline.
- (iii) Pour v' une place de F^+ et w' une place de F divisant v' , $WD(\rho_r|_{G_{F_w}})^{ss} \cong \text{rec}_{F_w}((r_v \circ \iota_w^{-1}) \otimes |\cdot|^{-1})^{ss}$. De plus, si p ne divise pas v' , on a :

$$WD(\rho_r|_{G_{F_w}})^{F-ss} \cong \text{rec}_{F_w}((r_v \circ \iota_w^{-1}) \otimes |\cdot|^{-1}),$$

où le $F-ss$ désigne la semi-simplification du Frobenius.

Remarque 6.2.5. Dans le théorème précédent, la valeur absolue $|\cdot|$ est à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$: c'est la composée de la valeur absolue usuelle suivie de l'inverse de l'isomorphisme $\Upsilon : \overline{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbb{C}$ fixé au début.

Pour une preuve de ce théorème, on pourra lire le théorème 7.2.1 de [EGH]. Nous pouvons maintenant établir le théorème principal de cette partie, qui répond au double objectif que nous nous étions fixé :

Théorème 6.2.6. (Relèvements de représentations et \tilde{S})

(A) Soit \tilde{V} un $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -module libre de type fini, muni d'une action localement algébrique de $GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$. Alors le $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -module $\tilde{S}(\tilde{V})$ est libre de type fini et les morphismes naturels

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tilde{V}) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p} &\rightarrow \tilde{S}(\tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p}) \\ \tilde{S}(\tilde{V}) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p} &\rightarrow \tilde{S}(\tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes.

(B) Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in (\mathbb{Z}_+^3)$ tel que $\tilde{S}(W_\lambda \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})_{\mathfrak{m}} \neq 0$. Alors $\rho|_{G_{F_w}}$ admet un relèvement cristallin $\tilde{\rho} : G_{F_w} \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{Q}_p})$ de poids de Hodge-Tate

$$-(\lambda_1 + 2, \lambda_2 + 1, \lambda_3).$$

Si $t_j \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ désigne une valeur propre de $\tilde{T}_{j,w}$ sur $\tilde{S}(W_\lambda \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})_{\mathfrak{m}}$ pour $j \in \{1, 2, 3\}$, alors on peut imposer que $\phi : D_{\text{cris}}(\tilde{\rho}) \rightarrow D_{\text{cris}}(\tilde{\rho})$ ait pour polynôme caractéristique $X^3 - t_1 X^2 + p t_2 X - p^3 t_3$.

- (C) Soit $\chi : \mathbb{F}_{p^3}^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ un caractère primitif. En voyant $R_3(\chi)$ comme une représentation de $GL_3(k_w)$, si $\tilde{S}(R_3(\chi))_{\mathfrak{m}} \neq 0$, alors $\rho|_{G_{F_w}}$ admet un relèvement potentiellement semi-stable $\tilde{\rho} : G_{F_w} \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{Q}_p})$ de poids de Hodge-Tate $(-2, -1, 0)$ et de type d'inertie $WD(\tilde{\rho})|_{I_{F_w}} = \bigoplus_{\sigma \in Gal(k_{w,3}/k_w)} \sigma(\chi \circ Art_{F_w,3}^{-1})$.
- (D) Soient $\chi_1, \chi_2, \chi_3 : k_w^\times = \mathbb{F}_p^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ trois caractères distincts. Si

$$\tilde{S} \left(Ind_{B_3^+(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)} (\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \chi_3) \right)_{\mathfrak{m}} \neq 0,$$

alors $\rho|_{G_{F_w}}$ admet un relèvement potentiellement semi-stable $\tilde{\rho} : G_{F_w} \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{Q}_p})$ de poids de Hodge-Tate $(-2, -1, 0)$ et de type d'inertie $WD(\tilde{\rho})|_{I_{F_w}} = \chi_1 \circ Art_{F_w}^{-1} \oplus \chi_2 \circ Art_{F_w}^{-1} \oplus \chi_3 \circ Art_{F_w}^{-1}$.

Démonstration. (A) La partie (i) du lemme 6.2.1 fournit un isomorphisme :

$$\tilde{S}(\tilde{V}) \cong S \left(U, \tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \bigotimes_{v'|p, v' \neq v} W_{a_{v'}} \right).$$

Comme U est suffisamment petit, cela impose que $\tilde{S}(\tilde{V})$ est libre de type fini. En utilisant les différentes parties du lemme 6.2.1, on obtient des isomorphismes :

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tilde{V}) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p} &\cong S \left(U, \tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \bigotimes_{v'|p, v' \neq v} W_{a_{v'}} \right) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p} \text{ (lemme (i))} \\ &\cong S \left(U, \tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \bigotimes_{v'|p, v' \neq v} W_{a_{v'}} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p} \right) \text{ (} U \text{ est suffisamment petit)} \\ &\cong \left((\tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}) \otimes_{\overline{\mathbb{F}_p}} S^{sm} \left(U^v, \bigotimes_{v'|p, v' \neq v} (W_{a_{v'}} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}) \right) \right)^{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})} \\ &\text{(lemme (ii))} \\ &\cong \left(\tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \tilde{S} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p} \right)^{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})} \text{ (lemme (iii))} \\ &\cong \tilde{S}(\tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}) \end{aligned}$$

Comme $\overline{\mathbb{Q}_p}$ est le corps des fractions de $\overline{\mathbb{Z}_p}$, par exactitude de la localisation, $\overline{\mathbb{Q}_p}$ est un $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -module plat. Par conséquent, le morphisme

$$\eta : \tilde{S}(\tilde{V}) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \tilde{S}(\tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})$$

est injectif. Pour la surjectivité, considérons $m \otimes x \in \tilde{S} \left(\tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p} \right)$ avec $m \in \tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \tilde{S}$ et $x \in \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$. Alors pour tout $\gamma \in GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$, on a $(\gamma m - m) \otimes x = 0$, et donc, comme $\tilde{V} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \tilde{S}$ est un $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -module sans torsion, $m \in \tilde{S}(\tilde{V})$: le morphisme η est bien surjectif.

(B) On remarque immédiatement que l'on peut supposer que $a_w = \lambda$. En appliquant successivement (A) et 6.2.1(i) puis en remarquant que U est suffisamment petit, on a :

$$\tilde{S}(W_\lambda \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p}) \cong \tilde{S}(W_\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p} \cong S(U, W_a) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p} \cong S(U, W_a \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p}).$$

On en déduit que $S(U, W_a \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})_{\mathfrak{m}} \neq 0$. Cet espace est le sous-espace vectoriel maximal de $S(U, W_a) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p}$ sur lequel tous les éléments de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}} - \mathfrak{m}$ agissent de manière inversible. Soit \mathcal{A} l'image $\mathbb{T}^{\mathcal{P}} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p}$ dans $End_{\overline{\mathbb{Q}_p}}(S(U, W_a) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})_{\mathfrak{m}}$. Le corps $\overline{\mathbb{Q}_p}$ étant algébriquement clos et \mathcal{A} étant commutative de dimension finie sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$, il existe une surjection $\eta' : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ telle que l'espace propre associé à η' dans $(S(U, W_a) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})_{\mathfrak{m}}$ est non nul. Par conséquent, si l'on note η la composée de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{A}$ et de η' , on obtient $\eta : \mathbb{T}^{\mathcal{P}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ telle que l'espace propre de η dans $Slim(W_a \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})$ est non nul.

Comme les actions de $G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)$ et $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ sur $Slim(W_a \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})$ commutent, cet espace propre est stable par $G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)$. Considérons donc une sous- $G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)$ -représentation irréductible r de cet espace propre telle que l'intersection de son espace sous-jacent et de $(S(U, W_a) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})_{\mathfrak{m}}$ soit non nulle. En appliquant le théorème 6.2.4, à r est associé une représentation continue semi-simple $\rho_r : G_F \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{Q}_p})$. Fixons une place $w' \in \mathcal{P}$, notons $v' = w'|_{F^+}$ et supposons que $r_{v'}$ est une représentation irréductible non ramifiée admissible. D'après la partie (iii) du théorème 6.2.4, on sait que $WD(\rho_r|_{G_{F_{w'}}})^{F-ss} \cong rec_{K_{w'}}((r_{v'} \circ \iota_{w'}^{-1}) \otimes |\cdot|^{-1})$. Comme chaque $T_{w'}^{(j)}$ agit sur l'espace sous-jacent de $r_{v'} \circ \iota_{w'}^{-1}$ par $\eta(T_{w'}^{(j)})$, chaque $T_{w'}^{(j)}$ agit sur l'espace sous-jacent de $(r_{v'} \circ \iota_{w'}^{-1})^\vee$ par $\eta(T_{w'^c}^{(j)})$. On déduit du corollaire 3.1.2 de [CHT08] que le polynôme caractéristique de $\rho_r^\vee(-2)(Frob_{w'}^{-1})$ est

$$X^3 - \eta(T_{w'^c}^{(1)})X^2 + p\eta(T_{w'^c}^{(2)})X - p^3\eta(T_{w'^c}^{(3)}).$$

Cela entraîne que le polynôme caractéristique de $\rho_r(Frob_{w'}^{-1})$ est

$$X^3 - \eta(T_{w'^c}^{(2)})\eta(T_{w'^c}^{(3)})^{-1}X^2 + p\eta(T_{w'^c}^{(1)})\eta(T_{w'^c}^{(3)})^{-1}X - p^3\eta(T_{w'^c}^{(3)})^{-1}.$$

D'après la remarque suivant la définition des $T_w^{(j)}$, ce polynôme est égal à :

$$X^3 - \eta(T_{w'}^{(1)})X^2 + p\eta(T_{w'}^{(2)})X - p^3\eta(T_{w'}^{(3)}).$$

Par conséquent, comme $\text{Ker}(\eta) \subseteq \mathfrak{m}$, pour presque toute place w' de F , $\rho^\vee(\text{Frob}_{w'})$ et $\overline{\rho}_r(\text{Frob}_{w'})$ ont même polynôme caractéristique. Le théorème de Cébotarev impose alors que, pour tout $g \in G_F$, $\rho^\vee(g)$ et $\overline{\rho}_r(g)$ ont même polynôme caractéristique. Par conséquent, $\rho \cong \overline{\rho}_r^\vee$.

Comme U est non ramifié en p , le théorème 6.2.4(i)(ii) impose que ρ_r est cristalline, et que $HT(\rho_r|_{G_{F_w}}) = (\lambda_1 + 2, \lambda_2 + 1, \lambda_3)$. Reste à étudier le Frobenius $\phi : D_{\text{cris}}(\rho_r) \rightarrow D_{\text{cris}}(\rho_r)$. La démonstration de ce point est analogue à ce qui précède.

(C),(D) On peut supposer $a_w = 0$. Notons $R = R_3(\chi)$ dans (C) et $R = \text{Ind}_{B_3^+(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)}(\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \chi_3)$ dans (D). On procède de manière très similaire à (B), et on trouve une sous-représentation r de $S_{\text{lim}}(W_a \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{Q}}_p)$ telle que r contient R^\vee et ρ_r^\vee est semi-stable de poids de Hodge-Tate $(-2, -1, 0)$, relève ρ et contient R (pour les détails, voir la preuve de la proposition 7.4.4 de [EGH]). Le théorème 6.2.4(iii) et la proposition 5.9.1 permettent alors de déterminer les représentations de Weil-Deligne. □

Nous verrons plus tard que toutes ces propriétés en caractéristique 0 portant sur \tilde{S} et des $\overline{\mathbb{Z}}_p$ -modules \tilde{V} munis d'actions de $GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$ induisent des propriétés analogues en caractéristique p portant sur S et des $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espaces vectoriels V munis d'actions de $GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$. Mais pour ce faire (en particulier pour traduire la partie (B) du théorème en caractéristique p), il nous faut d'abord construire des opérateurs de Hecke sur $S(V)$ qui vont correspondre aux opérateurs $\tilde{T}_{j,w}$ ($j \in \{1, 2, 3\}$) après réduction modulo p . C'est l'objectif de la section suivante.

6.3 Opérateurs de Hecke en caractéristique p

Soit V un poids de Serre local, vu comme représentation de $GL_3(k_w)$. Rappelons que, par définition, $c\text{-Ind}_{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})}^{GL_3(F_w)} V$ est l'ensemble des fonctions $f : GL_3(F_w) \rightarrow V$ telles que :

- (i) on a $f(hg) = hf(g)$ pour $h \in GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$ et $g \in GL_3(F_w)$,
- (ii) il existe un sous-groupe ouvert U de $GL_3(F_w)$ tel que $f(gu) = f(g)$ pour $u \in U$ et $g \in GL_3(F_w)$.
- (iii) l'image du support de f dans $GL_3(\mathcal{O}_{F_w}) \backslash GL_3(F_w)$ est compacte. Dans notre cas, cela revient à dire que f est à support compact.

Cet ensemble est muni d'une action continue de $GL_3(F_w)$ définie par $(\gamma \cdot f)(g) = f(g\gamma)$ pour $g, \gamma \in GL_3(F_w)$. On appelle **algèbre de Hecke de V** la $\overline{\mathbb{F}}_p$ -algèbre

$$\mathcal{H}(V) = \text{End}_{GL_3(F_w)} \left(c\text{-Ind}_{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})}^{GL_3(F_w)} V \right).$$

La loi de réciprocité de Frobenius impose alors un isomorphisme naturel de $\overline{\mathbb{F}_p}$ -espaces vectoriels :

$$\mathcal{H}(V) \cong \text{Hom}_{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})} \left(V, c - \text{Ind}_{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})}^{GL_3(F_w)} V \right).$$

Étant donné $\varphi \in \text{Hom}_{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})} \left(V, c - \text{Ind}_{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})}^{GL_3(F_w)} V \right)$, on définit une fonction $f : GL_3(F_w) \rightarrow \text{End}_{\overline{\mathbb{F}_p}} V$ par $f(g)(x) = \varphi(x)(g)$. L'application $\varphi \mapsto f$ est alors un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}_p}$ -espaces vectoriels entre $\text{Hom}_{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})} \left(V, c - \text{Ind}_{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})}^{GL_3(F_w)} V \right)$ et l'espace $\mathcal{F}(V)$ des fonctions $f : GL_3(F_w) \rightarrow \text{End}_{\overline{\mathbb{F}_p}} V$ à support compact telles que $f(hgh') = h \circ f(g) \circ h'$ pour $h, h' \in GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$ et $g \in GL_3(F_w)$. On dispose donc d'un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}_p}$ -espaces vectoriels :

$$\mathcal{H}(V) \cong \mathcal{F}(V),$$

qui devient un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}_p}$ -algèbres si l'on munit $\mathcal{F}(V)$ du produit de convolution :

$$(f_1 * f_2)(g) = \sum_{\gamma \in GL_3(\mathcal{O}_{F_w}) \backslash GL_3(F_w)} f_1(g\gamma^{-1}) \circ f_2(\gamma),$$

pour $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(V)$ et $g \in GL_3(F_w)$. Dans la suite, on identifiera donc systématiquement $\mathcal{H}(V)$ et $\mathcal{F}(V)$.

Bien évidemment, nous voulons faire agir l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(V)$ sur certains espaces. Pour $f \in \mathcal{F}(V)$ et $x \in S(V)$, posons :

$$f \cdot x = \sum_{\gamma \in GL_3(\mathcal{O}_{F_w}) \backslash GL_3(F_w)} (f(\gamma^{-1}) \otimes \gamma^{-1})x.$$

Cela définit une action de $\mathcal{H}(V)$ sur $S(V)$.

Introduisons à présent quelques opérateurs de Hecke particuliers. Pour $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in X_*(T_3)$ avec $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$, on appelle $T_{\mu,w}$ l'élément de $\mathcal{F}(V)$ qui a pour support $GL_3(\mathcal{O}_{F_w})\mu(\pi)GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$ et qui envoie $\mu(\pi)$ sur l'endomorphisme $V \rightarrow V_{N_\mu(k_w)} \cong V^{N-\mu(k_w)} \hookrightarrow V$, où l'isomorphisme est celui décrit dans la proposition 3.4.1. Pourquoi nous intéressons-nous à ces opérateurs-là ? En fait, nous allons voir maintenant que, si nous fixons un poids restreint local λ , nous pouvons relier les opérateurs $T_{\mu,w}$ sur $S(F_\lambda)$ aux opérateurs $\tilde{T}_{1,w}, \tilde{T}_{2,w}, \tilde{T}_{3,w}$ sur $\tilde{S}(W_\lambda \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})$ (qui est isomorphe à $\tilde{S}(W_\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p}$ d'après le théorème 6.2.6(A)).

Soit donc $\lambda \in \mathbb{Z}_+^3$ un poids restreint local. Rappelons que nous disposons d'injections $F_\lambda \hookrightarrow W_\lambda \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}$ et $S \hookrightarrow \tilde{S} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}$ compatibles avec les actions de \mathbb{T}^P et de $GL_3(F_w)$. En utilisant le théorème 6.2.6(A), cela conduit à une injection :

$$S(F_\lambda) \hookrightarrow \tilde{S}(W_\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}$$

qui commute avec l'action de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$. Sur $S(F_\lambda)$ agissent les deux opérateurs de Hecke $T_{1,w} = T_{(0,0,1),w}$ et $T_{2,w} = T_{(0,1,1),w}$. Ces opérateurs sur $S(F_\lambda)$ vont jouer un rôle essentiel dans la suite parce qu'il sont intimement liés aux opérateurs $\tilde{T}_{1,w}$ et $\tilde{T}_{2,w}$ sur $\tilde{S}(W_\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p}$:

Proposition 6.3.1. (Rapport entre les opérateurs de Hecke en caractéristique p et les opérateurs de Hecke en caractéristique 0)

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ un poids restreint local. Notons $\tilde{Q}_{1,w} = \pi^{-\lambda_3} \tilde{T}_{1,w}$ et $\tilde{Q}_{2,w} = \pi^{-\lambda_2 - \lambda_3} \tilde{T}_{2,w}$. Ce sont des opérateurs sur $\tilde{S}(W_\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p}$. Pour $j \in \{1, 2\}$, on a :

- (i) L'opérateur $\tilde{Q}_{j,w}$ laisse stable le réseau $\tilde{S}(W_\lambda)$.
- (ii) L'action induite par $\tilde{Q}_{j,w}$ sur $\tilde{S} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}$ laisse $S(F_\lambda)$ stable.
- (iii) L'action induite par $\tilde{Q}_{j,w}$ sur $S(F_\lambda)$ coïncide avec celle de l'opérateur $T_{j,w}$.

Démonstration. Nous allons prouver la proposition pour $j = 1$. L'autre cas est tout à fait analogue.

- (i) Notons $\mu = (0, 0, 1) \in X_*(T_3)$. Il suffit de montrer que $\pi^{-\lambda_3} \mu(\pi)$ laisse W_λ stable. Rappelons que l'on peut décomposer :

$$M_\lambda(\mathcal{O}_{F_w}) \otimes_{\mathcal{O}_{F_w}} \overline{\mathbb{Q}_p} = \bigoplus_{\nu \in X^*(T_3)} \mathcal{M}_\nu,$$

où $T_3(\overline{\mathbb{Q}_p})$ agit sur \mathcal{M}_ν par ν . On remarque alors que, pour $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in X^*(T_3)$, $\mu(\pi)$ agit sur \mathcal{M}_ν par multiplication par π^{ν_3} . Or, si $\mathcal{M}_\nu \neq 0$, alors $\nu_3 \geq \lambda_3$. Par conséquent, $\pi^{-\lambda_3} \mu(\pi)$ laisse $W_\lambda = M_\lambda(\mathcal{O}_{F_w}) \otimes_{\mathcal{O}_{F_w}} \overline{\mathbb{Z}_p}$ stable.

- (ii) Il suffit cette fois de montrer que $\pi^{-\lambda_3} \mu(\pi)$ laisse F_λ stable dans $W_\lambda \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}$. Notons $\mathcal{W}_\nu = W_\lambda \cap \mathcal{M}_\nu$ pour $\nu \in X^*(T_3)$. D'après ce que nous avons vu en (i), $\pi^{-\lambda_3} \mu(\pi)$ agit sur $W_\lambda \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}$ par la projection :

$$\bigoplus_{\nu \in X^*(T_3)} (\mathcal{W}_\nu \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}) \rightarrow \bigoplus_{\nu \in X^*(T_3), \nu_3 = \lambda_3} (\mathcal{W}_\nu \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}).$$

De plus, on dispose aussi d'une décomposition

$$F_\lambda = N_\lambda(\mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}_p} = \bigoplus_{\nu \in X^*(T_3)} \mathcal{N}_\nu,$$

où $T_3(\overline{\mathbb{F}_p})$ agit sur \mathcal{N}_ν par ν . Comme F_λ est une sous-représentation de $W_\lambda \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}$, on déduit que F_λ est bien stable par $\pi^{-\lambda_3} \mu(\pi)$.

- (iii) C'est immédiat en tenant compte de ce que nous venons de voir et de la proposition 3.4.1. □

Nous avons ainsi défini des opérateurs de Hecke en caractéristique p qui sont compatibles avec les opérateurs de Hecke en caractéristique 0. Nous pouvons donc maintenant étudier les conséquences du théorème 6.2.6 en caractéristique p : c'est l'objet de la section suivante.

6.4 Étape II : Passage en caractéristique p

Afin de comprendre ce qu'implique le théorème 6.2.6(B) sur les opérateurs $T_{1,w}$ et $T_{2,w}$, il convient d'étudier de plus près les valeurs propres des $\tilde{T}_{j,w}$ pour $j \in \{1, 2, 3\}$:

Proposition 6.4.1. (Réductibilité de $\rho|_{G_{F_w}}$)

Supposons que $\tilde{S}(W_\lambda \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})_{\mathfrak{m}} \neq 0$ et que, pour $j \in \{1, 2, 3\}$, t_j désigne une valeur propre de $\tilde{T}_{j,w}$ sur $\tilde{S}(W_\lambda \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})_{\mathfrak{m}}$. Supposons de plus que :

$$\text{val}_p(t_1) = \lambda_3$$

ou que

$$\text{val}_p(t_2) = \lambda_2 + \lambda_3.$$

Alors $\rho|_{G_{F_w}}$ n'est pas irréductible.

Démonstration. Comme $\tilde{S}(W_\lambda \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})_{\mathfrak{m}} \neq 0$, le théorème 6.2.6(B) impose que $\rho|_{G_{F_w}}$ admet un relèvement cristallin $\tilde{\rho} : G_{F_w} \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{Q}_p})$ de poids de Hodge-Tate $-(\lambda_1+2, \lambda_2+1, \lambda_3)$ tel que $\phi : D_{\text{cris}}(\tilde{\rho}) \rightarrow D_{\text{cris}}(\tilde{\rho})$ a pour polynôme caractéristique $X^3 - t_1X^2 + pt_2X - p^3t_3$.

Comme dans l'étape 1 de la preuve de 5.16.1, il existe une extension finie E de \mathbb{Q}_p telle que $\text{Im}(\tilde{\rho}) \subseteq GL_3(E)$. Nous pouvons de plus supposer que $X^3 - t_1X^2 + pt_2X - p^3t_3$ est scindé sur E .

Notons $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in E$ les racines du polynôme $X^3 - t_1X^2 + pt_2X - p^3t_3$, ordonnées de sorte que $\text{val}_p(\alpha_1) \leq \text{val}_p(\alpha_2) \leq \text{val}_p(\alpha_3)$. On définit un sous- ϕ -module filtré D' de $D_{\text{cris}}(\tilde{\rho})$ de la manière suivante : si $\text{val}_p(t_1) = \lambda_3$, D' est un sous- ϕ -module filtré de $D_{\text{cris}}(\tilde{\rho})$ de dimension 1 sur E sur lequel ϕ agit par multiplication par α_1 ; si $\text{val}_p(t_2) = \lambda_2 + \lambda_3$, D' est un sous- ϕ -module filtré de $D_{\text{cris}}(\tilde{\rho})$ de dimension 2 sur E sur lequel les valeurs propres de ϕ sont α_1 et α_2 . On calcule alors :

(i) Si $\text{val}_p(t_1) = \lambda_3$,

$$t_N(D') = (\dim_{\mathbb{Q}_p} E) \text{val}_p(\alpha_1) \leq (\dim_{\mathbb{Q}_p} E) \text{val}_p(t_1).$$

De plus, comme $\lambda_3 < \lambda_2 + 1 < \lambda_1 + 2$, on a

$$t_H(D') \geq (\dim_{\mathbb{Q}_p} E) \lambda_3 = (\dim_{\mathbb{Q}_p} E) \text{val}_p(t_1) \geq t_N(D').$$

Comme $D_{\text{cris}}(\tilde{\rho})$ est faiblement admissible, on a $t_H(D') = t_N(D')$.

(ii) Si $\text{val}_p(t_2) = \lambda_2 + \lambda_3$,

$$t_N(D') = (\dim_{\mathbb{Q}_p} E)(\text{val}_p(\alpha_1) + \text{val}_p(\alpha_2)) \leq (\dim_{\mathbb{Q}_p} E)(1 + \text{val}_p(t_2)).$$

De plus, comme $\lambda_3 < \lambda_2 + 1 < \lambda_1 + 2$, on a

$$t_H(D') \geq (\dim_{\mathbb{Q}_p} E)(\lambda_2 + \lambda_3 + 1) = (\dim_{\mathbb{Q}_p} E)(1 + \text{val}_p(t_2)) \geq t_N(D').$$

Comme $D_{\text{cris}}(\tilde{\rho})$ est faiblement admissible, on a $t_H(D') = t_N(D')$.

Dans tous les cas, $t_H(D') = t_N(D')$. Le théorème 5.8.4 impose alors que $\rho|_{G_{F_w}}$ n'est pas irréductible. \square

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème suivant, qui résume toutes les conséquences du théorème 6.2.6 en caractéristique p :

Théorème 6.4.2. (Relèvements de représentations et S)

Supposons que $\rho|_{G_{F_w}}$ est irréductible.

(A*) Pour tout poids de Serre local V vu comme représentation de $GL_3(k_w)$, le $\overline{\mathbb{F}_p}$ -espace vectoriel $S(V)$ est de dimension finie.

(B*) Si $V = F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est un poids de Serre local tel que $S(V)_\mathfrak{m} \neq 0$, alors $\rho|_{G_{F_w}}$ admet un relèvement cristallin $\tilde{\rho} : G_{F_w} \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{Q}_p})$ de poids de Hodge-Tate $(-\lambda_1 - 2, -\lambda_2 - 1, -\lambda_3)$. De plus, les opérateurs de Hecke $T_{1,w}$ et $T_{2,w}$ agissent de manière nilpotente sur $S(V)_\mathfrak{m}$.

(C*) Soient $\chi : \mathbb{F}_{p^3}^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ un caractère primitif et $V = F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ un poids de Serre local tel que $S(V)_\mathfrak{m} \neq 0$. En voyant $R_3(\chi)$ comme une représentation de $GL_3(k_w)$, si V est isomorphe à une composante de Jordan-Hölder d'une réduction modulo p de $R_3(\chi)$, alors $\rho|_{G_{F_w}}$ admet un relèvement potentiellement semi-stable $\tilde{\rho} : G_{F_w} \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{Q}_p})$ de poids de Hodge-Tate $(-2, -1, 0)$ et de type d'inertie $WD(\tilde{\rho})|_{I_{F_w}} = \bigoplus_{\sigma \in \text{Gal}(k_{w,3}/k_w)} \sigma(\chi \circ \text{Art}_{F_w,3}^{-1})$.

(D*) Soient $\chi_1, \chi_2, \chi_3 : k_w^\times = \mathbb{F}_p^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ trois caractères distincts et $V = F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ un poids de Serre local tel que $S(V)_\mathfrak{m} \neq 0$. Si V est une composante de Jordan-Hölder de $\text{Ind}_{B_3^+(k_w)}^{GL_3(k_w)}(\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \chi_3)$, alors $\rho|_{G_{F_w}}$ admet un relèvement potentiellement semi-stable $\tilde{\rho} : G_{F_w} \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{Q}_p})$ de poids de Hodge-Tate $(-2, -1, 0)$ et de type d'inertie

$$WD(\tilde{\rho})|_{I_{F_w}} = \chi_1 \circ \text{Art}_{F_w}^{-1} \oplus \chi_2 \circ \text{Art}_{F_w}^{-1} \oplus \chi_3 \circ \text{Art}_{F_w}^{-1}.$$

Démonstration. (A*) Si l'on note $V = F_\lambda$, cela découle immédiatement du théorème 6.2.6(A) et de l'injection $S(F_\lambda) \hookrightarrow \tilde{S}(W_\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}$.

(B*) On note $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Comme on dispose d'une injection $S(F_\lambda) \hookrightarrow \tilde{S}(W_\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}$ et comme $S(F_\lambda)_\mathfrak{m} \neq 0$, par exactitude de la localisation, on déduit que $(\tilde{S}(W_\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p})_\mathfrak{m} \neq 0$. On dispose de plus d'une surjection $\tilde{S}(W_\lambda) \twoheadrightarrow$

$\tilde{S}(W_\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}$, et donc $\tilde{S}(W_\lambda)_\mathfrak{m} \neq 0$. En utilisant le théorème 6.2.6(A), on obtient aussi une injection $\tilde{S}(W_\lambda) \hookrightarrow \tilde{S}(W_\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p}$, d'où $(\tilde{S}(W_\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})_\mathfrak{m} \neq 0$. Par conséquent, le théorème 6.2.6(A)(B) impose que $\rho|_{G_{F_w}}$ admet un relèvement cristallin $\tilde{\rho} : G_{F_w} \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{Q}_p})$ de poids de Hodge-Tate $-(\lambda_1 + 2, \lambda_2 + 1, \lambda_3)$.

Reste à prouver la nilpotence des opérateurs $T_{1,w}$ et $T_{2,w}$ sur $S(V)_\mathfrak{m}$. Nous allons bien sûr la déduire des propriétés des opérateurs $\tilde{T}_{1,w}$ et $\tilde{T}_{2,w}$ à l'aide de la proposition 6.3.1. Considérons les opérateurs $\tilde{Q}_{1,w} = \pi^{-\lambda_3} \tilde{T}_{1,w}$ et $\tilde{Q}_{2,w} = \pi^{-\lambda_2 - \lambda_3} \tilde{T}_{2,w}$. Nous savons alors, grâce à la proposition 6.3.1, que $\tilde{Q}_{1,w}$ et $\tilde{Q}_{2,w}$ stabilisent $\tilde{S}(W_\lambda)$, que l'espace $S(F_\lambda)$ est stable sous l'action induite sur $\tilde{S}(W_\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}$, et que $\tilde{Q}_{1,w}$ et $\tilde{Q}_{2,w}$ agissent comme $T_{1,w}$ et $T_{2,w}$ sur $S(F_\lambda)$. Considérons α_1 et α_2 dans $\overline{\mathbb{F}_p}$ des valeurs propres respectives de $\tilde{Q}_{1,w}$ et de $\tilde{Q}_{2,w}$ sur $(\tilde{S}(W_\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p})_\mathfrak{m}$ correspondant à un même vecteur propre et montrons que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, ce qui permettra immédiatement de conclure que les actions de $T_{1,w}$ et $T_{2,w}$ sur $S(F_\lambda)_\mathfrak{m}$ sont nilpotentes puisque $T_{1,w}$ et $T_{2,w}$ commutent.

La $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -algèbre commutative $\mathbb{T}^\mathcal{P}[\tilde{Q}_{1,w}, \tilde{Q}_{2,w}]$ agit sur le $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -module libre de type fini $\tilde{S}(W_\lambda)$. Soit \mathfrak{n} le noyau du morphisme de $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -algèbres $\eta : \mathbb{T}^\mathcal{P}[\tilde{Q}_{1,w}, \tilde{Q}_{2,w}] \rightarrow \mathbb{T}^\mathcal{P}/\mathfrak{m} = \overline{\mathbb{F}_p}$ qui envoie $\tilde{Q}_{1,w}$ sur α_1 et $\tilde{Q}_{2,w}$ sur α_2 . Comme α_1 et α_2 sont des valeurs propres de $\tilde{Q}_{1,w}$ et de $\tilde{Q}_{2,w}$ correspondant au même vecteur propre dans $(\tilde{S}(W_\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p})_\mathfrak{m}$ et comme l'algèbre $\mathbb{T}^\mathcal{P}[\tilde{Q}_{1,w}, \tilde{Q}_{2,w}]$ est commutative, on déduit que $(\tilde{S}(W_\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p})_\mathfrak{n} \neq 0$. Par exactitude de la localisation, cela impose que $\tilde{S}(W_\lambda)_\mathfrak{n} \neq 0$ et donc que $(\tilde{S}(W_\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})_\mathfrak{n} \neq 0$, puisque $\tilde{S}(W_\lambda)$ est un $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -module libre de type fini d'après le théorème 6.2.6(A). Remarquons que $(\tilde{S}(W_\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})_\mathfrak{n}$ est le sous-espace vectoriel maximal de $\tilde{S}(W_\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p}$ sur lequel tous les éléments de $\mathbb{T}^\mathcal{P}[\tilde{Q}_{1,w}, \tilde{Q}_{2,w}]$ qui ne sont pas dans \mathfrak{n} agissent de manière inversible.

Considérons maintenant l'image \mathcal{A} de $\mathbb{T}^\mathcal{P}[\tilde{Q}_{1,w}, \tilde{Q}_{2,w}] \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p}$ dans $End_{\overline{\mathbb{Q}_p}}((\tilde{S}(W_\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})_\mathfrak{n})$. Le corps $\overline{\mathbb{Q}_p}$ étant algébriquement clos et l'algèbre \mathcal{A} étant commutative, on voit qu'il existe une surjection de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ -algèbres $\eta' : \mathcal{A} \twoheadrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ telle que l'espace propre associé à η' dans $(\tilde{S}(W_\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})_\mathfrak{n}$ est non nul. Par conséquent, l'espace propre associé à η' dans $\tilde{S}(W_\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p}$ est aussi non nul. Notons alors $\tilde{\eta} : \mathbb{T}^\mathcal{P}[\tilde{Q}_{1,w}, \tilde{Q}_{2,w}] \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ la composée de l'application naturelle $\mathbb{T}^\mathcal{P}[\tilde{Q}_{1,w}, \tilde{Q}_{2,w}] \rightarrow \mathcal{A}$ suivie de η' .

Si $\alpha_1 \neq 0$, alors $\tilde{\eta}(\tilde{Q}_{1,w})$ serait une unité, et donc $\tilde{T}_{1,w}$ posséderait une valeur propre de valuation p -adique λ_3 sur $\tilde{S}(W_\lambda \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})_\mathfrak{m}$, ce qui impliquerait que $\tilde{\rho}$ ne soit pas irréductible d'après la proposition 6.4.1 et donc que $\rho|_{G_{F_w}}$ ne soit pas irréductible. De même, si $\alpha_2 \neq 0$, alors $\tilde{\eta}(\tilde{Q}_{2,w})$ serait une unité, et donc $\tilde{T}_{2,w}$ posséderait une valeur propre de valuation p -adique $\lambda_2 + \lambda_3$ sur $\tilde{S}(W_\lambda \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})_\mathfrak{m}$, ce qui impliquerait que $\tilde{\rho}$ ne soit pas irréductible d'après la proposition 6.4.1 et donc que $\rho|_{G_{F_w}}$ ne soit pas irréductible. Dans tous les cas, on arrive à une

contradiction. Par conséquent, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et donc les actions de $\tilde{T}_{1,w}$ et $\tilde{T}_{2,w}$ sont bien nilpotentes.

(C*) • Montrons d'abord que V est une sous-représentation d'une réduction de $R_3(\chi)$. Comme dans l'étape 1 de la démonstration de 5.16.1, on peut supposer que l'image de $R_3(\chi) : GL_3(\mathbb{F}_p) \rightarrow GL_{(p+1)(p-1)^2}(\overline{\mathbb{Q}_p})$ est contenue dans $GL_{(p+1)(p-1)^2}(\mathcal{O}_E)$ pour une certaine extension finie E de \mathbb{Q}_p et que la réduction $\overline{R_3(\chi)} : GL_3(\mathbb{F}_p) \rightarrow GL_{(p+1)(p-1)^2}(\mathcal{O}_E/\mathfrak{m}_E)$ contient déjà une composante de Jordan-Hölder V_E telle que $V_E \otimes \overline{\mathbb{F}_p} = V$.

Notons R_1^E le \mathcal{O}_E -réseau stable canonique de $R_3(\chi)$. Soit $\text{pr} : R_1^E \rightarrow R_1^E \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_E/\mathfrak{m}_E$ la projection canonique. Comme V_E est une composante de Jordan-Hölder de $R_1^E \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_E/\mathfrak{m}_E$, il existe une suite exacte :

$$0 \rightarrow X_E \rightarrow R_1^E \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_E/\mathfrak{m}_E \rightarrow Y_E \rightarrow 0$$

telle que V_E s'injecte dans Y_E . On a alors les inclusions $\mathfrak{m}_E R_1^E \subseteq \text{pr}^{-1}(X_E) \subseteq R_1^E$, donc $\text{pr}^{-1}(X_E)$ est un réseau stable de $R_3(\chi)$. De plus, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow Y_E \rightarrow \text{pr}^{-1}(X_E) \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_E/\mathfrak{m}_E \rightarrow X_E \rightarrow 0.$$

Donc, en notant $R_0^E = \text{pr}^{-1}(X_E)$, R_0^E est un \mathcal{O}_E -réseau stable de $R_3(\chi)$ tel que V_E est une sous-représentation de $R_0^E \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_E/\mathfrak{m}_E$. On en déduit que en notant $R_0 = R_0^E \otimes \overline{\mathbb{Z}_p}$, R_0 est un $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -réseau stable de $R_3(\chi)$ tel que V est une sous-représentation de $R_0 \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}$.

• On dispose alors d'une injection $S(V) \hookrightarrow S(R_0 \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p})$. Comme $S(V)_{\mathfrak{m}} \neq 0$, cela impose que $S(R_0 \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p})_{\mathfrak{m}} \neq 0$. Or nous disposons d'une injection $S(R_0 \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}) \hookrightarrow \tilde{S}(R_0) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}$ compatible avec l'action de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$. Par conséquent, $(\tilde{S}(R_0) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p})_{\mathfrak{m}} \neq 0$. De plus, d'après le théorème 6.2.6(A), $\tilde{S}(R_0 \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}) \cong \tilde{S}(R_0) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p}$. On déduit alors que $(\tilde{S}(R_0) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{F}_p})_{\mathfrak{m}} \neq 0$ et que $\tilde{S}(R_0)_{\mathfrak{m}} \neq 0$. Le théorème 6.2.6(A) affirme que $\tilde{S}(R_0)$ est un $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -module libre de type fini et que $\tilde{S}(R_0) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p} \cong \tilde{S}(R_0 \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \overline{\mathbb{Q}_p})$, ce qui implique que $\tilde{S}(R_3(\chi))_{\mathfrak{m}} \neq 0$. Le théorème 6.2.6(C) permet alors de conclure.

(D*) La preuve est tout à fait analogue à celle de (C*), en utilisant le théorème 6.2.6(A)(D). □

De toute cette partie sur les relèvements de représentations, il suffira pour la suite de retenir ce dernier théorème.

7 Comparaison des ensembles de poids locaux

Nous avons introduit deux ensembles de poids de Serre locaux associés à la représentation ρ : d'une part, l'ensemble $W_w(\rho)$ constitué des poids de Serre locaux V tels que $S(V)_\mathfrak{m} \neq 0$, et d'autre part, l'ensemble des poids locaux prévus $W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$. L'objectif de cette partie consiste à comparer ces deux ensembles.

Nous conservons ici toutes les hypothèses et notations de la section 4.1. Fixons $\rho : G_F \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{F}_p})$ une représentation continue automorphe ainsi qu'une place w de F divisant p . Notons $v = w|_{F^+}$ et considérons π une uniformisante de \mathcal{O}_{F_w} . Comme ρ est automorphe, nous pouvons utiliser la section 6. Supposons finalement que $\rho|_{G_{F_w}}$ est irréductible et modérément ramifiée, de sorte que nous pouvons appliquer le théorème 6.4.2 et que l'ensemble $W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$ est bien défini.

7.1 Les poids locaux associés à une représentation sont souvent des poids prévus

Théorème 7.1.1. *(Les poids locaux associés à une représentation sont souvent des poids prévus)*

Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_+^3)_0$ un poids restreint local tel que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- (i) $x - z < p - 3$.
- (ii) $x - y < p - 5$, $y - z < p - 5$ et $x - z > p + 1$.

Dans ces conditions, si $F(x, y, z) \in W_w(\rho)$, alors $F(x, y, z) \in W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$.

Démonstration. (i) Supposons que $F(x, y, z) \in W_w(\rho)$. D'après le théorème 6.4.2(B*), $\rho|_{G_{F_w}}$ admet un relèvement cristallin $\tilde{\rho} : G_{F_w} \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{Q}_p})$ de poids de Hodge-Tate $-(x+2, y+1, z)$. Considérons $\rho' = \rho \otimes \overline{\mathbb{F}_p}(-x-2)$ et $\tilde{\rho}' = \tilde{\rho} \otimes \overline{\mathbb{Q}_p}(-x-2)$. Dans ce cas, $\tilde{\rho}'$ est un relèvement cristallin de ρ' de poids de Hodge-Tate $(0, x-y+1, x-z+2)$.

Comme dans l'étape 1 de la preuve du théorème 5.16.1, on peut supposer que $\tilde{\rho}'$ arrive dans $GL_3(\mathcal{O}_E)$ pour E une extension finie de degré m de \mathbb{Q}_p . De plus, comme dans l'étape 3 du même théorème, il existe un caractère $\chi : I_{F_w} \rightarrow (\mathcal{O}_E/\mathfrak{m}_E)^\times$ tel que $\rho'|_{I_{F_w}} \cong \chi \oplus \chi^p \oplus \chi^{p^2}$ et $\chi^{p^3} = \chi$. Voyons $\tilde{\rho}'$ comme une représentation de dimension $3m$ sur \mathbb{Q}_p et ρ' comme une représentation de dimension au plus $3m$ sur \mathbb{F}_p . Notons $\rho'_p = \tilde{\rho}' \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p$: c'est une représentation de G_{F_w} sur \mathbb{F}_p de dimension $3m$. On remarque alors que ρ' est un quotient de ρ'_p . Nous allons utiliser la théorie de Fontaine-Laffaille. Comme $x - z + 2 \leq p - 2$, le théorème 5.13.5 entraîne l'existence de $M \in FL_{tor}^{p-2}$ tel que $T_{cris}^*(M) = \rho'_p$. En appliquant la proposition 5.13.6 de la théorie de Fontaine-Laffaille, on déduit que χ est $\omega_3^{p(y-x-1)+p^2(z-x-2)}$, $\omega_3^{(y-x-1)+p(z-x-2)}$,

$\omega_3^{(z-x-2)+p^2(y-x-1)}$, $\omega_3^{(y-x-1)+p^2(z-x-2)}$, $\omega_3^{(z-x-2)+p(y-x-1)}$ ou $\omega_3^{p(z-x-2)+p^2(y-x-1)}$.

On en déduit que $\rho|_{I_{F_w}} \cong \tau(\xi, (x+2, y+1, z))$ pour ξ un cycle d'ordre 3.

On en déduit immédiatement que $F(x, y, z) \in W_w^2(\rho|_{G_{F_w}})$.

(ii) Supposons que $F(x, y, z) \in W_w(\rho)$. Notons $a = y$, $b = x - (p-1)$ et $c = z$. D'après le théorème 3.3.3, la représentation $\overline{W(b+p-1, a, c)}$ est un sous-quotient de $\overline{Ind_{B_3^+(k_w)}^{GL_3(k_w)}([\cdot]^a \otimes [\cdot]^b \otimes [\cdot]^c)}$, et donc, en appliquant la proposition

3.3.4, $F(x, y, z)$ est une composante de Jordan-Hölder de $\overline{Ind_{B_3^+(k_w)}^{GL_3(k_w)}([\cdot]^a \otimes [\cdot]^b \otimes [\cdot]^c)}$.

Par conséquent, d'après le théorème 6.4.2(D*), $\rho|_{G_{F_w}}$ admet un relèvement potentiellement semi-stable $\tilde{\rho} : G_{F_w} \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{Q}_p})$ de poids de Hodge-Tate $(-2, -1, 0)$ et de type d'inertie

$$\begin{aligned} WD(\tilde{\rho})|_{I_{F_w}} &= [\cdot]^a \circ \text{Art}_{F_w}^{-1} \oplus [\cdot]^b \circ \text{Art}_{F_w}^{-1} \oplus [\cdot]^c \circ \text{Art}_{F_w}^{-1} \\ &\cong \tilde{\omega}_1^a \oplus \tilde{\omega}_1^b \oplus \tilde{\omega}_1^c. \end{aligned}$$

Le théorème 5.16.1 impose alors que

$$\begin{aligned} \rho|_{I_p} &\cong \tau((1 \ 2 \ 3), (a+a_0, c+a_2, b+a_1)) \\ &\cong \tau((1 \ 2 \ 3), (y+a_0, z+a_2, x-p+1+a_1)) \\ &\cong \tau((1 \ 3 \ 2), (y+a_0, x-p+1+a_1, z+a_2)) \quad (1) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \rho|_{I_p} &\cong \tau((1 \ 2 \ 3), (a+2-a_2, b+2-a_1, c+2-a_0)) \\ &\cong \tau((1 \ 2 \ 3), (y+2-a_2, x-p+3-a_1, z+2-a_0)) \quad (2) \end{aligned}$$

avec $(a_0, a_1, a_2) \in \{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (2, 1, 0)\}$.

Notons maintenant $e_0 = y+1$, $e_1 = x - (p-1)$ et $e_2 = z-1$. Considérons le caractère de \mathbb{F}_{q^3} donné par $\chi = [\cdot]^{e_0+pe_1+p^2e_2}$. D'après le théorème 3.3.3, la représentation $\overline{W(e_1+p-1, e_0-1, e_2+1)}$ est un sous-quotient de $\overline{R_3(\chi)}$, et donc, en appliquant la proposition 3.3.4, $F(x, y, z)$ est une composante de Jordan-Hölder de $\overline{R_3(\chi)}$. Par conséquent, d'après le théorème 6.4.2(C*), $\rho|_{G_{F_w}}$ admet un relèvement potentiellement semi-stable $\tilde{\rho} : G_{F_w} \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{Q}_p})$ de poids de Hodge-Tate $(-2, -1, 0)$ et de type d'inertie

$$\begin{aligned} WD(\tilde{\rho})|_{I_{F_w}} &= \bigoplus_{\sigma \in \text{Gal}(k_{w,3}/k_w)} \sigma(\chi \circ \text{Art}_{F_w,3}^{-1}) \\ &\cong \tilde{\omega}_3^{e_0+pe_1+p^2e_2} \oplus \tilde{\omega}_3^{e_1+pe_2+p^2e_0} \oplus \tilde{\omega}_3^{e_2+pe_0+p^2e_1}. \end{aligned}$$

Par conséquent, le théorème 5.16.1 permet de conclure que

$$\begin{aligned} \rho|_{I_p} &\cong \tau((1 \ 2 \ 3), (e_0+a_0, e_2+a_2, e_1+a_1)) \\ &\cong \tau((1 \ 2 \ 3), (y+1+a_0, z-1+a_2, x-p+1+a_1)) \\ &\cong \tau((1 \ 3 \ 2), (y+1+a_0, x-p+1+a_1, z-1+a_2)) \quad (3) \end{aligned}$$

avec $(a_0, a_1, a_2) \in \{(0, 2, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 0)\}$ ou

$$\begin{aligned}\rho|_{I_p} &\cong \tau((1\ 2\ 3), (e_0 + a_0, e_1 + a_2, e_2 + a_1)) \\ &\cong \tau((1\ 2\ 3), (y + 1 + a_0, x - p + 1 + a_2, z - 1 + a_1))\end{aligned}\quad (4)$$

et $(a_0, a_1, a_2) \in \{(0, 1, 2), (0, 2, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 1), (1, 2, 0), (2, 0, 1), (2, 1, 0)\}$.

Notons finalement $e'_0 = x + 1$, $e'_1 = z + p - 1$ et $e'_2 = y - 1$. Considérons le caractère de \mathbb{F}_{q^3} donné par $\chi' = [\cdot]^{e'_2 + pe'_1 + p^2e'_0}$. D'après le théorème 3.3.3, la représentation $\overline{W(-e'_1 + p - 1, -e_2 - 1, -e_0 + 1)}$ est un sous-quotient de $\overline{R_3(\chi'^{-1})}$, et donc, en appliquant la proposition 3.3.4, $F(-z, -y, -x)$ est une composante de Jordan-Hölder de $\overline{R_3(\chi'^{-1})}$. On en déduit que $F(x, y, z)$ est une composante de Jordan-Hölder de $\overline{R_3(\chi)}$, et donc, d'après le théorème 6.4.2(C*), $\rho|_{G_{F_w}}$ admet un relèvement potentiellement semi-stable $\tilde{\rho}' : G_{F_w} \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{Q}_p})$ de poids de Hodge-Tate $(-2, -1, 0)$ et de type d'inertie

$$\begin{aligned}WD(\tilde{\rho})|_{I_{F_w}} &= \bigoplus_{\sigma \in Gal(k_{w,3}/k_w)} \sigma(\chi' \circ Art_{F_w,3}^{-1}) \\ &\cong \tilde{\omega}_3^{e'_2 + pe'_1 + p^2e'_0} \oplus \tilde{\omega}_3^{e'_0 + pe'_2 + p^2e'_1} \oplus \tilde{\omega}_3^{e'_1 + pe'_0 + p^2e'_2}.\end{aligned}$$

Par conséquent, le théorème 5.16.1 permet de conclure que

$$\begin{aligned}\rho|_{I_p} &\cong \tau((1\ 2\ 3), (e'_2 + 2 - a_0, e'_0 + 2 - a_2, e'_1 + 2 - a_1)) \\ &\cong \tau((1\ 2\ 3), (y + 2 - a_0, x - p + 3 - a_2, z + 2 - a_1))\end{aligned}\quad (5)$$

avec $(a_0, a_1, a_2) \in \{(0, 2, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 0)\}$ ou

$$\begin{aligned}\rho|_{I_p} &\cong \tau((1\ 2\ 3), (e'_2 + 2 - a_0, e'_1 + 2 - a_2, e'_0 + 2 - a_1)) \\ &\cong \tau((1\ 2\ 3), (y + 2 - a_0, z + 1 - a_2, x - p + 4 - a_1)) \\ &\cong \tau((1\ 3\ 2), (y + 2 - a_0, x - p + 4 - a_1, z + 1 - a_2))\end{aligned}\quad (6)$$

et $(a_0, a_1, a_2) \in \{(0, 1, 2), (0, 2, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 1), (1, 2, 0), (2, 0, 1), (2, 1, 0)\}$. La remarque 4.4.1 permet d'établir que les cas (1), (3), (6) sont distincts des cas (2), (4), (5). Par conséquent, nous sommes dans l'un des cas suivants :

- les alternatives (1), (3) et (6) sont satisfaites. Dans ce cas, on observe grâce à la remarque 4.4.1 que la possibilité $\rho|_{I_p} \cong \tau((1\ 3\ 2), (y + a_0, x - p + 1 + a_1, z + a_2))$ avec $(a_0, a_1, a_2) = (1, 1, 1)$ ne figure pas parmi les possibilités décrites en (3). On en déduit que $\rho|_{I_p} \cong \tau((1\ 3\ 2), (y + a_0, x - p + 1 + a_1, z + a_2))$ avec $(a_0, a_1, a_2) \in \{(1, 2, 0), (2, 1, 0)\}$.
- les alternatives (2), (4) et (5) sont satisfaites. Dans ce cas, on observe grâce à la remarque 4.4.1 que la possibilité $\rho|_{I_p} \cong \tau((1\ 2\ 3), (y + 2 - a_2, x - p + 3 - a_1, z + 2 - a_0))$ avec $(a_0, a_1, a_2) = (1, 2, 0)$ ne figure pas parmi les possibilités décrites en (5). On en déduit que $\rho|_{I_p} \cong \tau((1\ 2\ 3), (y + a_0, x - p + 1 + a_1, z + a_2))$ avec $(a_0, a_1, a_2) \in \{(1, 1, 1), (2, 1, 0)\}$.

Supposons par exemple que $\rho|_{I_p} \cong \tau((1\ 3\ 2), (y+1, x-p+3, z))$. On a alors :

$$\begin{aligned}\rho|_{I_p} &\cong \tau((1\ 3\ 2), (z, y+1, x-p+3)) \\ &\cong \tau((1\ 3\ 2), (z+p, y+1, x-p+2)).\end{aligned}$$

Comme $p^2 + p + 1$ ne divise pas $(z+p) + p(x-p+2) + p^2(y+1)$, cela impose que $(z+p, y+1, x-p+2) \in \mathcal{C}(\rho)$. Comme $F(z+p-2, y, x-p+2)$ est dans l'alcôve inférieure, $F(x, y, z) \in \mathcal{A}(z+p, y+1, x-p+2)$. Donc $F(x, y, z) \in W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$. Les trois autres cas sont analogues. □

7.2 Les poids locaux prévus sont souvent des poids associés à la représentation

Nous allons maintenant prouver que, sous certaines hypothèses, les poids locaux prévus sont dans $W_w(\rho)$. Commençons tout d'abord par un lemme technique :

Lemme 7.2.1. (Un isomorphisme de compatibilité avec la localisation)
Pour tout sous-groupe ouvert compact U de $GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$, la dimension de S^U est finie, et si V est un $\overline{\mathbb{F}_p}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action continue de $GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$, on a un isomorphisme naturel :

$$S(V)_m \cong (V \otimes_{\overline{\mathbb{F}_p}} S_m)^{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})}.$$

Démonstration. Soit U un sous-groupe ouvert compact de $GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$. La loi de réciprocity de Frobenius impose alors que :

$$S^U \cong \text{Hom}_U(\overline{\mathbb{F}_p}, S) \cong \text{Hom}_{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})}(Ind_U^{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})} \overline{\mathbb{F}_p}, S).$$

Par conséquent, $\dim(S^U)$ est inférieure ou égale à la somme des dimensions des $\text{Hom}_{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})}(V', S) \cong S(V'^\vee)$ pour V' décrivant les composantes de Jordan-Hölder de $Ind_U^{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})} \overline{\mathbb{F}_p}$. Le théorème 6.4.2(A*) permet alors de conclure que $\dim(S^U) < \infty$.

Soit maintenant V un $\overline{\mathbb{F}_p}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action continue de $GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$. Comme l'action de $GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$ sur S est continue, on a :

$$V \otimes_{\overline{\mathbb{F}_p}} S = \bigcup_U (V \otimes_{\overline{\mathbb{F}_p}} S^U),$$

où U décrit les sous-groupes ouverts compacts distingués de $GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$. Comme les actions de $GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$ et de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ sur S commutent, on en déduit :

$$S(V)_m \cong \varinjlim_U \left((V \otimes_{\overline{\mathbb{F}_p}} S^U)^{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})} \right)_m$$

et :

$$(V \otimes_{\mathbb{F}_p} S_{\mathfrak{m}})^{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})} \cong \varinjlim_U \left((V \otimes_{\mathbb{F}_p} S^U)_{\mathfrak{m}} \right)^{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})}.$$

Nous avons vu que $V \otimes_{\mathbb{F}_p} S^U$ est de dimension finie. Par conséquent, $(V \otimes_{\mathbb{F}_p} S^U)_{\mathfrak{m}}$ est le sous-espace maximal de $V \otimes_{\mathbb{F}_p} S^U$ sur lequel tout élément de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ qui n'est pas dans \mathfrak{m} agit de manière inversible, et $\left((V \otimes_{\mathbb{F}_p} S^U)^{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})} \right)_{\mathfrak{m}}$ est le sous-espace maximal de $(V \otimes_{\mathbb{F}_p} S^U)^{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})}$ sur lequel tout élément de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ qui n'est pas dans \mathfrak{m} agit de manière inversible. On en déduit que le morphisme naturel :

$$\left((V \otimes_{\mathbb{F}_p} S^U)^{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})} \right)_{\mathfrak{m}} \rightarrow \left((V \otimes_{\mathbb{F}_p} S^U)_{\mathfrak{m}} \right)^{GL_3(\mathcal{O}_{F_w})}$$

est un isomorphisme. \square

D'après le théorème 6.4.2(B*), si V est un poids de Serre local tel que $S(V)_{\mathfrak{m}} \neq 0$, alors l'action des opérateurs $T_{1,w}$ et $T_{2,w}$ sur $S(V)_{\mathfrak{m}}$ n'est pas injective. Dans la suite, nous allons montrer que cela entraîne que $S(V')_{\mathfrak{m}} \neq 0$ pour un poids de Serre local V' autre que V . Ainsi, en appliquant de nombreuses fois de suite ce principe, à partir d'un poids $V \in W_w(\rho)$, nous pourrions trouver successivement d'autres poids de Serre locaux V', V'', \dots dans $W_w(\rho)$, et nous verrons que nous obtenons tous les poids de $W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$ par ce procédé, de sorte que $W_w^?(\rho|_{G_{F_w}}) \subseteq W_w(\rho)$. Pour ce faire, étudions un peu plus les opérateurs $T_{\mu,w}$:

Proposition 7.2.2. (Factorisation de $T_{\mu,w}$)

Soit V un poids de Serre local. Soient $\mu \in X_*(T_3)$ et $t = \mu(\pi)$, avec $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$. En notant $K = GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$, on dispose alors d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (V \otimes_{\mathbb{F}_p} S_{\mathfrak{m}})^K \hookrightarrow & \left((Ind_{K \cap tKt^{-1}}^K V^{N-\mu(k_w)}) \otimes_{\mathbb{F}_p} S_{\mathfrak{m}} \right)^K & \\ & \downarrow & \\ & (V \otimes_{\mathbb{F}_p} S_{\mathfrak{m}})^K & \end{array}$$

$T_{\mu,w}$ (sur la flèche diagonale descendante)

la flèche verticale étant induite par la réciprocity de Frobenius.

Démonstration. Soit $x \in (V \otimes_{\mathbb{F}_p} S_{\mathfrak{m}})^K$. Trouvons $\gamma_1, \dots, \gamma_d \in K$ tels que $K = \coprod_{i=1}^d (K \cap tKt^{-1})\gamma_i$. Alors $KtK = \bigcup_{i=1}^d K(t^{-1}Kt \cap K)t^{-1}\gamma_i = \bigcup_{i=1}^d Kt\gamma_i$. Si $i \neq j$, alors $\gamma_i\gamma_j^{-1} \notin tKt^{-1}$, d'où $(t^{-1}\gamma_i)(t^{-1}\gamma_j)^{-1} \notin K$. Par conséquent, $KtK = \coprod_{i=1}^d Kt^{-1}\gamma_i$.

On calcule alors :

$$\begin{aligned}
T_{\mu,w}x &= \sum_{\gamma \in K \backslash GL_3(F_w)} (T_{\mu,w}(\gamma^{-1}) \otimes \gamma^{-1})x \\
&= \sum_{\gamma \in K \backslash Kt^{-1}K} (T_{\mu,w}(\gamma^{-1}) \otimes \gamma^{-1})x \\
&= \sum_{i=1}^d (T_{\mu,w}(\gamma_i^{-1}t) \otimes \gamma_i^{-1}t)x \\
&= \sum_{i=1}^d (\gamma_i^{-1} \otimes \gamma_i^{-1})(T_{\mu,w}(t) \otimes t)x \\
&= \sum_{\gamma \in (K \cap tKt^{-1}) \backslash K} (\gamma^{-1} \otimes \gamma^{-1})y,
\end{aligned}$$

où $y = (T_{\mu,w}(t) \otimes t)x \in V^{N-\mu(k_w)} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} S_{\mathfrak{m}}$. Remarquons que, si $\gamma \in K \cap tKt^{-1}$, alors

$$\gamma y = (T_{\mu,w}(\gamma t) \otimes (\gamma t))x = (T_{\mu,w}(t) \otimes t)(t^{-1}\gamma t)x = y.$$

D'où $y \in (V^{N-\mu(k_w)} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} S_{\mathfrak{m}})^{K \cap tKt^{-1}}$.

Pour $\gamma \in K$ et $u \in V^{N-\mu(k_w)}$, notons maintenant $[\gamma, u]$ l'élément de $Ind_{K \cap tKt^{-1}}^K V^{N-\mu(k_w)}$ à support dans $(K \cap tKt^{-1})\gamma$ envoyant γ sur u . Notons aussi $[\gamma, \cdot]$ l'application $V^{N-\mu(k_w)} \rightarrow Ind_{K \cap tKt^{-1}}^K V^{N-\mu(k_w)}$ envoyant u sur $[\gamma, u]$, et posons :

$$z = \sum_{\gamma \in (K \cap tKt^{-1}) \backslash K} ([\gamma, \cdot] \otimes \gamma^{-1})y \in Ind_{K \cap tKt^{-1}}^K V^{N-\mu(k_w)} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} S_{\mathfrak{m}}.$$

On vérifie immédiatement que z est fixé par K . Par conséquent, $y \mapsto z$ définit un morphisme $(V^{N-\mu(k_w)} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} S_{\mathfrak{m}})^{K \cap tKt^{-1}} \rightarrow \left((Ind_{K \cap tKt^{-1}}^K V^{N-\mu(k_w)}) \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} S_{\mathfrak{m}} \right)^K$, qui est en fait un isomorphisme d'inverse défini par $f \otimes s \mapsto f(Id) \otimes s$ pour $f \in Ind_{K \cap tKt^{-1}}^K V^{N-\mu(k_w)}$ et $s \in S_{\mathfrak{m}}$. Posons $i(x) = z$.

Nous avons ainsi défini un morphisme $i : \left(V \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} S_{\mathfrak{m}} \right)^K \rightarrow \left((Ind_{K \cap tKt^{-1}}^K V^{N-\mu(k_w)}) \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} S_{\mathfrak{m}} \right)^K$.

Soit $\eta : V \twoheadrightarrow V_{N\mu(k_w)} \twoheadrightarrow V_{U(k_w)} \cong \overline{\mathbb{F}}_p$ (le choix du dernier isomorphisme est arbitraire), et considérons $x \in Ker(i)$. Alors comme $y \mapsto z$ est un isomorphisme, $(T_{\mu,w}(t) \otimes t)x = 0$, et donc, par définition de $T_{\mu,w}$ et de η , on a $(\eta \otimes t)x = 0$. Comme V est une représentation irréductible de K , il en est de même de V^\vee , et, par conséquent, η engendre V^\vee comme représentation de K . Comme de plus x est fixé par K , on déduit que pour tout $\varphi \in V^\vee$ il existe $\gamma_\varphi \in K$ tel que $(\varphi \otimes t\gamma_\varphi)x = 0$. Étant donné que $t\gamma_\varphi$ définit un isomorphisme de $S_{\mathfrak{m}}$, cela impose que $x = 0$, d'où l'injectivité de φ .

Maintenant, considérons le morphisme naturel $\psi : \left((Ind_{K \cap tKt^{-1}}^K V^{N-\mu(kw)}) \otimes_{\mathbb{F}_p} S_{\mathfrak{m}} \right)^K \rightarrow \left(V \otimes_{\mathbb{F}_p} S_{\mathfrak{m}} \right)^K$ induit par la réciprocité de Frobenius. Plus précisément, ψ envoie $[\gamma, u] \otimes s$ sur $\gamma^{-1}u \otimes s$ pour $\gamma \in K$, $u \in V^{N-\mu(kw)}$ et $s \in S_{\mathfrak{m}}$. On remarque alors que, pour $x \in \left(V \otimes_{\mathbb{F}_p} S_{\mathfrak{m}} \right)^K$:

$$\begin{aligned} \psi(i(x)) &= \psi \left(\sum_{\gamma \in (K \cap tKt^{-1}) \setminus K} ([\gamma, \cdot] \otimes \gamma^{-1})y \right) \\ &= \sum_{\gamma \in (K \cap tKt^{-1}) \setminus K} (\gamma^{-1} \otimes \gamma^{-1})y \\ &= T_{\mu, w}x. \end{aligned}$$

□

Cette proposition entraîne le corollaire important suivant :

Corollaire 7.2.3. (Non injectivité de $T_{\mu, w}$)

Soit V un poids de Serre local. Notons toujours $K = GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$. Soit $\mu \in X_*(T)$ tel que $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$ et $T_{\mu, w}$ n'est pas injectif sur $S(V)_{\mathfrak{m}}$. Alors il existe une composante de Jordan-Hölder V' de $Ker(Ind_{K \cap tKt^{-1}}^K V^{N-\mu(kw)} \rightarrow V)$ telle que $S(V')_{\mathfrak{m}} \neq 0$.

Démonstration. Considérons une suite de Jordan-Hölder :

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_d = Ker(Ind_{K \cap tKt^{-1}}^K V^{N-\mu(kw)} \rightarrow V).$$

Supposons que, pour tout $0 \leq i \leq d-1$, $S(V_{i+1}/V_i)_{\mathfrak{m}} = 0$. Alors, pour tout i , on a $S(V_i)_{\mathfrak{m}} \cong S(V_{i+1})_{\mathfrak{m}}$, et donc $S(Ker(Ind_{K \cap tKt^{-1}}^K V^{N-\mu(kw)} \rightarrow V))_{\mathfrak{m}} = 0$. On en déduit que $Ker(S(Ind_{K \cap tKt^{-1}}^K V^{N-\mu(kw)} \rightarrow S(V)_{\mathfrak{m}})) = 0$, et donc que $T_{\mu, w}$ est injectif sur $S(V)$ d'après la proposition précédente : contradiction ! □

Rappelons que nous avons défini les deux sous-groupes paraboliques de $GL_3(\mathbb{F}_p)$ suivants :

$$P_{(1,2)}^+(\mathbb{F}_p) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix},$$

$$P_{(2,1)}^+(\mathbb{F}_p) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Nous aurons besoin dans la suite de proposition suivante qui concerne la théorie des représentations :

Proposition 7.2.4. (Composantes de Jordan-Hölder de certaines inductions paraboliques)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $a > b > c$ et $a - c < p - 1$.

(i) Les composantes de Jordan-Hölder de $\text{Ind}_{P_{(1,2)}^+(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)}(F(a) \otimes F(b, c))$ sont :

$$F(b, c, a - p + 1), F(b + p - 1, a, c), F(a, b, c).$$

(ii) Les composantes de Jordan-Hölder de $\text{Ind}_{P_{(1,2)}^+(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)}(F(a) \otimes F(c, b - p + 1))$ sont :

$$F(c + p - 1, b, a - p + 1), F(c + p - 1, a, b), F(c + p - 2, a, b + 1),$$

$$F(a - 1, b, c + 1), F(b - 1, c, a - p + 2), F(a, c, b - p + 1).$$

Démonstration. On pourra aller voir le lemme 6.1.1 de [EGH]. □

Grâce à la proposition précédente, nous pouvons donner une version beaucoup plus explicite du corollaire 7.2.3 dans les cas où $\mu = (0, 0, 1)$ et $\mu = (0, 1, 1)$:

Proposition 7.2.5. Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_+^3)_0$ un poids restreint, et notons $V = F(x, y, z)$.

(i) Supposons que $x > y > z$, $x - z < p - 1$ et que $T_{1,w}$ n'est pas injectif sur $S(V)_m$. Alors $S(V')_m \neq 0$ pour V' l'un des deux poids de Serre locaux :

$$F(z + p - 1, x, y), F(x, z, y - p + 1).$$

(ii) Supposons que $x > y > z$, $x - z < p - 1$ et que $T_{2,w}$ n'est pas injectif sur $S(V)_m$. Alors $S(V')_m \neq 0$ pour V' l'un des deux poids de Serre locaux :

$$F(y, z, x - p + 1), F(y + p - 1, x, z).$$

(iii) Supposons que $x - y < p - 1$, $y - z < p - 1$, $x - z > p - 1$ et que $T_{1,w}$ n'est pas injectif sur $S(V)_m$. Alors $S(V')_m \neq 0$ pour V' l'un des cinq poids de Serre locaux :

$$F(x, z + p - 1, y), F(x - 1, z + p - 1, y + 1), F(y - 1, x - p + 1, z + 1),$$

$$F(z + p - 2, y, x - p + 2), F(z + 2p - 2, x, y).$$

(iv) Supposons que $x - y < p - 1$, $y - z < p - 1$, $x - z > p - 1$ et que $T_{2,w}$ n'est pas injectif sur $S(V)_m$. Alors $S(V')_m \neq 0$ pour V' l'un des cinq poids de Serre locaux :

$$F(y, x - p + 1, z), F(y - 1, x - p + 1, z + 1), F(x - 1, z + p - 1, y + 1),$$

$$F(z + p - 2, y, x - p + 2), F(y, z, x - 2p + 2).$$

Démonstration. Notons $K = GL_3(\mathcal{O}_{F_w})$.

- (i) Considérons $\mu = (0, 0, 1)$. D'après la proposition 7.2.3, il existe une composante de Jordan-Hölder V' de $Ker(Ind_{K \cap \mu(\pi)K\mu(\pi)^{-1}}^K V^{N-\mu(k_w)} \rightarrow V)$ telle que $(V' \otimes_{\mathbb{F}_p} S_m)^K \neq 0$ et donc telle que $S(V')_m \neq 0$ d'après le lemme 7.2.1. Or, étant donné que $Ker(K \rightarrow GL_3(\mathbb{F}_p))$ est contenu dans $K \cap \mu(\pi)K\mu(\pi)^{-1}$ et que l'image de $K \cap \mu(\pi)K\mu(\pi)^{-1}$ dans $GL_3(\mathbb{F}_p)$ est $P_{(2,1)}^+(\mathbb{F}_p)$, on a :

$$Ind_{K \cap \mu(\pi)K\mu(\pi)^{-1}}^K V^{N-\mu(k_w)} \cong Ind_{P_{(2,1)}^+(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)} V^{N-\mu(\mathbb{F}_p)}.$$

De plus, d'après 3.4.1, $V^{N-\mu(\mathbb{F}_p)} \cong F(x, y) \otimes F(z)$, et donc V' est une composante de Jordan-Hölder de $Ind_{P_{(2,1)}^+(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)} (F(x, y) \otimes F(z))$. On remarque alors que, dans le groupe de Grothendieck :

$$\begin{aligned} Ind_{P_{(2,1)}^+(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)} (F(x, y) \otimes F(z)) &\cong Ind_{P_{(1,2)}^+(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)} (F(z) \otimes F(x, y)) \\ &\cong Ind_{P_{(1,2)}^+(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)} (F(z + p - 1) \otimes F(x, y)) \end{aligned}$$

Comme $z + p - 1 > x > y$ et $z + p - 1 - y < p - 1$, en prenant $a = z + p - 1$, $b = x$ et $c = y$, la proposition 7.2.4(i) impose alors que V' est $F(z + p - 1, x, y)$ ou $F(x, z, y - p + 1)$.

- (ii) Considérons $\mu = (0, 1, 1)$. D'après la proposition 7.2.3, il existe une composante de Jordan-Hölder V' de $Ker(Ind_{K \cap \mu(\pi)K\mu(\pi)^{-1}}^K V^{N-\mu(k_w)} \rightarrow V)$ telle que $(V' \otimes_{\mathbb{F}_p} S_m)^K \neq 0$ et donc telle que $S(V')_m \neq 0$ d'après le lemme 7.2.1. Or, étant donné que $Ker(K \rightarrow GL_3(\mathbb{F}_p))$ est contenu dans $K \cap \mu(\pi)K\mu(\pi)^{-1}$ et que l'image de $K \cap \mu(\pi)K\mu(\pi)^{-1}$ dans $GL_3(\mathbb{F}_p)$ est $P_{(1,2)}^+(\mathbb{F}_p)$, on a :

$$Ind_{K \cap \mu(\pi)K\mu(\pi)^{-1}}^K V^{N-\mu(k_w)} \cong Ind_{P_{(1,2)}^+(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)} V^{N-\mu(\mathbb{F}_p)}.$$

Or, d'après 3.4.1, $V^{N-\mu(\mathbb{F}_p)} \cong F(x) \otimes F(y, z)$, et donc V' est une composante de Jordan-Hölder de $Ind_{P_{(1,2)}^+(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)} (F(x) \otimes F(y, z))$. En prenant $a = x$, $b = y$ et $c = z$, la proposition 7.2.4(i) impose alors que V' est $F(y, z, x - p + 1)$ ou $F(y + p - 1, x, z)$.

- (iii) Comme en (i), on trouve V' comme composante de Jordan-Hölder de :

$$Ind_{P_{(1,2)}^+(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)} (F(z) \otimes F(x, y)) \cong Ind_{P_{(1,2)}^+(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)} (F(z + 2(p - 1)) \otimes F(x, (y + p - 1) - p + 1)).$$

L'application de la proposition 7.2.4(ii) avec $a = z + 2(p - 1)$, $b = y + p - 1$ et $c = x$ permet de conclure.

(iv) Comme en (ii), on trouve V' comme composante de Jordan-Hölder de :

$$\text{Ind}_{P_{(1,2)}^+(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)}(F(x) \otimes F(y, z)) \cong \text{Ind}_{P_{(1,2)}^+(\mathbb{F}_p)}^{GL_3(\mathbb{F}_p)}(F(x) \otimes F(y, (z + p - 1) - p + 1)).$$

L'application de la proposition 7.2.4(ii) avec $a = x$, $b = z + p - 1$ et $c = y$ permet de conclure. □

Rassemblons maintenant toutes les idées que nous avons développées dans cette section pour prouver le théorème :

Théorème 7.2.6. *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $a - b > 5$, $b - c > 4$ et $a - c < p - 7$, et supposons l'une des deux conditions suivantes :*

(I) *On a un isomorphisme $\rho|_{I_{F_w}} \cong \tau((1 \ 2 \ 3), (a + 2, b + 1, c))$.*

(II) *On a un isomorphisme $\rho|_{I_p}^{\vee} \otimes \omega_1^2 \cong \tau((1 \ 2 \ 3), (a + 2, b + 1, c))$.*

Alors $W_{gen,w}(\rho) = W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$ ou $W_{gen,w}(\rho) = \emptyset$.

Démonstration. Prouvons d'abord le théorème en supposant (I). La première étape consiste à donner une description explicite de l'ensemble des poids locaux prévus $W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$ à l'aide de la proposition 4.4.5. Il nous faut donc d'abord déterminer l'ensemble $\mathcal{C}(\rho)$, qui est décrit par la proposition 4.4.6. Les hypothèses sur a, b, c imposent immédiatement que nous sommes dans le cas (C) de la proposition 4.4.6 avec $e = (a + 2) + p(b + 1) + p^2c$, $e_0 = a + 2$, $e_1 = b + 1$ et $e_2 = c$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\rho) = & \{(a + 2, b + 1, c), (b + 2, c, a + 2 - p), (c + p, a + 1, b + 1), \\ & (c + p, b + 2, a - p + 1), (a + 2, c + 1, b + 1 - p), (b + 1 + p, a + 2, c - 1)\} \\ & + (p - 1)\mathbb{Z}(1, 1, 1), \end{aligned}$$

puisque tous les poids précédents sont dans $X_1(T_3)$. Les poids $(a + 2, b + 1, c)$, $(b + 2, c, a + 2 - p)$, $(c + p, a + 1, b + 1)$ sont dans l'alcôve inférieure alors que les poids $(c + p, b + 2, a - p + 1)$, $(a + 2, c + 1, b + 1 - p)$, $(b + 1 + p, a + 2, c - 1)$ sont dans l'alcôve supérieure, d'où :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(a + 2, b + 1, c) &= \{F(a, b, c), F(c + p - 2, b, a - p + 2)\}, \\ \mathcal{A}(b + 2, c, a + 2 - p) &= \{F(b, c - 1, a + 2 - p), F(a, c - 1, b - p + 2)\}, \\ \mathcal{A}(c + p, a + 1, b + 1) &= \{F(c + p - 2, a, b + 1), F(b + p - 1, a, c)\}, \\ \mathcal{A}(c + p, b + 2, a - p + 1) &= \{F(c + p - 2, b + 1, a - p + 1)\}, \\ \mathcal{A}(a + 2, c + 1, b + 1 - p) &= \{F(a, c, b + 1 - p)\}, \\ \mathcal{A}(b + 1 + p, a + 2, c - 1) &= \{F(b - 1 + p, a + 1, c - 1)\}. \end{aligned}$$

On déduit alors de la proposition 4.4.5 que :

$$W_w^?(\rho|_{G_{F_w}}) = \{F(a, b, c), F(b, c - 1, a + 2 - p), F(c + p - 2, a, b + 1), \\ F(c + p - 2, b, a - p + 2), F(a, c - 1, b - p + 2), F(b + p - 1, a, c), \\ F(c + p - 2, b + 1, a - p + 1), F(a, c, b + 1 - p), F(b - 1 + p, a + 1, c - 1)\}$$

où les trois premiers poids sont dans l'alcôve inférieure et les six derniers poids sont dans l'alcôve supérieure. On remarque immédiatement grâce au corollaire 3.2.4 que ces neuf poids sont deux à deux non isomorphes. Les conditions sur a, b, c imposent que ces neuf poids sont génériques.

Soit $V \in W_{gen,w}(\rho)$. Le théorème 7.1.1 impose alors que $V \in W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$. Neuf possibilités se présentent donc :

(i) Supposons que $V = F(a, b, c)$. Le théorème 6.4.2(B*) impose que $T_{1,w}$ n'est pas injectif sur $S(V)_m$. Par conséquent, d'après la proposition 7.2.5(i), $S(V')_m \neq 0$ pour $V' = F(c + p - 1, a, b)$ ou pour $V' = F(a, c, b - p + 1)$. Si $V' = F(c + p - 1, a, b)$, alors $F(c + p - 1, a, b) \in W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$ en vertu du théorème 7.1.1. Comme $c + p - 1 - b < p - 5$, cela entraîne que V' devrait être isomorphe à $F(a, b, c)$, à $F(b, c - 1, a + 2 - p)$ ou à $F(c + p - 2, a, b + 1)$, mais ce n'est pas le cas. Donc $V' = F(a, c, b - p + 1)$ et $F(a, c, b - p + 1) \in W_w(\rho)$.

De même, en travaillant avec $T_{2,w}$ au lieu de $T_{1,w}$, on montre que $F(b + p - 1, a, c) \in W_w(\rho)$.

(ii) Supposons que $V = F(b, c - 1, a + 2 - p)$. Comme en (i), on prouve alors que $F(b, a - p + 2, c - p)$ et $F(c + p - 2, b, a - p + 2)$ sont dans $W_w(\rho)$.

(iii) Supposons que $V = F(c + p - 2, a, b + 1)$. Comme en (i), on prouve alors que $F(c + p - 2, b + 1, a - p + 1)$ et $F(a + p - 1, c + p - 2, b + 1)$ sont dans $W_w(\rho)$.

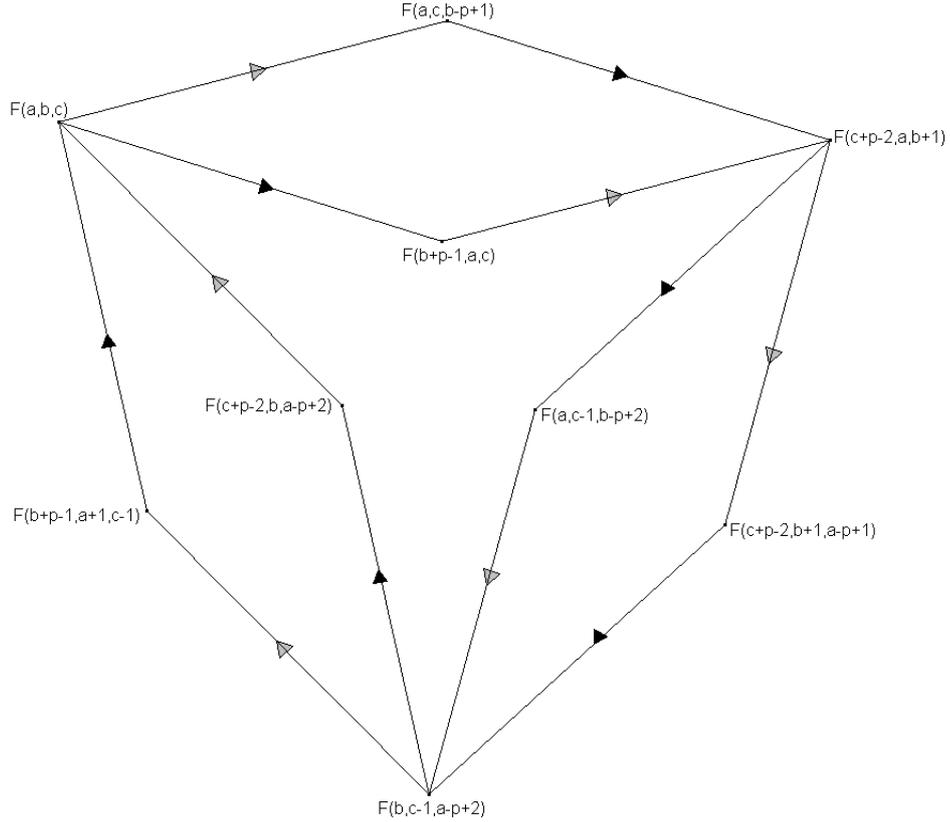
(iv) Supposons que $V = F(c + p - 2, b, a - p + 2)$. Le théorème 6.4.2(B*) impose que $T_{1,w}$ n'est pas injectif sur $S(V)_m$. Par conséquent, d'après la proposition 7.2.5(iii), $S(V')_m \neq 0$ pour $V' = F(c + p - 2, a + 1, b)$, $V' = F(c + p - 3, a + 1, b + 1)$, $V' = F(b - 1, c - 1, a - p + 3)$, $V' = F(a, b, c)$ ou $V' = F(a + 1, c - 1, b - p + 1)$. De plus, V' doit appartenir à $W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$ en vertu du théorème 7.1.1. On vérifie aisément que cela entraîne que $V' = F(a, b, c)$ et donc que $F(a, b, c) \in W_w(\rho)$.

(v) Supposons que $V = F(a, c - 1, b - p + 2)$. Comme en (iv), on prouve alors que $F(b, c - 1, a - p + 2)$ est dans $W_w(\rho)$.

(vi) Supposons que $V = F(b + p - 1, a, c)$. Comme en (iv), on prouve alors que $F(c + p - 2, a, b + 1)$ est dans $W_w(\rho)$.

(vii) Supposons que $V = F(c + p - 2, b + 1, a - p + 1)$. Le théorème 6.4.2(B*) impose que $T_{2,w}$ n'est pas injectif sur $S(V)_m$. Par conséquent, d'après la proposition 7.2.5(iv), $S(V')_m \neq 0$ pour $V' = F(b + 1, c - 1, a - p + 1)$, $V' = F(b, c - 1, a - p + 2)$, $V' = F(c + p - 3, a, b + 2)$, $V' = F(a - 1, b + 1, c)$ ou $V' = F(b + 1, a - p + 1, c - p)$. De plus, V' doit appartenir à $W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$ en vertu du théorème 7.1.1. On vérifie aisément que cela entraîne que $V' = F(b, c - 1, a - p + 2)$ et donc que

- $F(b, c - 1, a - p + 2) \in W_w(\rho)$.
- (viii) Supposons que $V = F(a, c, b + 1 - p)$. Comme en (vii), on prouve alors que $F(c + p - 2, a, b + 1)$ est dans $W_w(\rho)$.
- (ix) Supposons que $V = F(b - 1 + p, a + 1, c - 1)$. Comme en (vii), on prouve alors que $F(a, b, c)$ est dans $W_w(\rho)$.
- Voici un schéma de la situation :



Chaque flèche $F_1 \rightarrow F_2$ signifie que, si $F_1 \in W_w(\rho)$, alors $F_2 \in W_w(\rho)$. Les flèches grises correspondent à la non injectivité de $T_{1,w}$ et les flèches noires à la non injectivité de $T_{2,w}$.

On voit immédiatement que, si $W_{gen,w}(\rho) \neq \emptyset$, alors $W_w^?(\rho|_{G_{F_w}}) \subseteq W_{gen,w}(\rho)$, et le théorème 7.1.1 entraîne que $W_{gen,w}(\rho) \subseteq W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$, d'où

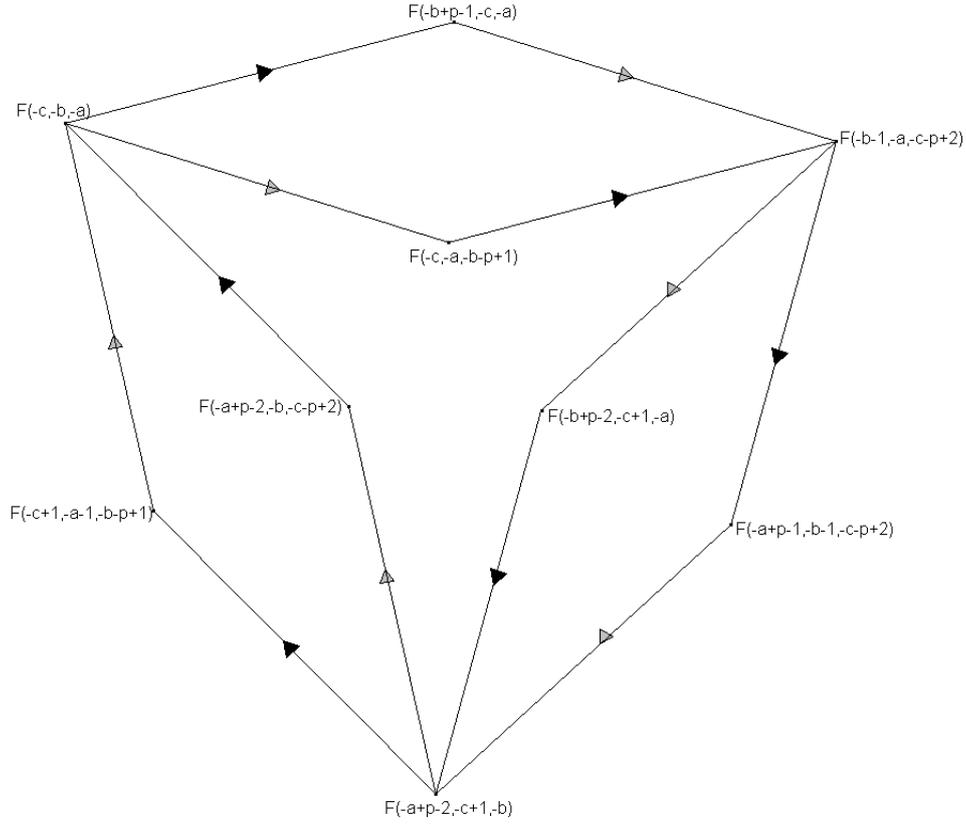
$$W_{gen,w}(\rho) = W_w^?(\rho|_{G_{F_w}}).$$

Prouvons maintenant le théorème en supposant (II). Remarquons que $W_w^?(\rho|_{G_{F_w}}^{\vee} \otimes$

$\omega_1^2) = W_w^2(\rho|_{G_{F_w}})^\vee$. Par conséquent :

$$W_w^2(\rho|_{G_{F_w}}) = \{F(-c, -b, -a), F(-a - 2 + p, -c + 1, -b), F(-b - 1, -a, -c - p + 2), \\ F(-a + p - 2, -b, -c - p + 2), F(-b + p - 2, -c + 1, -a), \\ F(-c, -a, -b - p + 1), F(-a + p - 1, -b - 1, -c - p + 2), \\ F(-b - 1 + p, -c, -a), F(-c + 1, -a - 1, -b + 1 - p)\}$$

Ces neuf poids sont bien génériques. De manière tout à fait analogue à la preuve dans le cas où l'on supposait (I), on peut résumer la situation par le diagramme suivant :



Comme avant, chaque flèche $F_1 \rightarrow F_2$ signifie que, si $F_1 \in W_w(\rho)$, alors $F_2 \in W_w(\rho)$, les flèches grises correspondent à la non injectivité de $T_{1,w}$ et les flèches noires à la non injectivité de $T_{2,w}$. On conclut alors exactement de la même manière que lorsque l'on avait supposé (I). \square

Toutes les idées importantes ont été développées dans la preuve précédente. Nous pouvons maintenant prouver un corollaire facile, mais dont l'énoncé est plus élégant, du théorème précédent :

Corollaire 7.2.7. (Les poids locaux prévus sont souvent des poids associés à la représentation)

Si $W_w(\rho)$ contient un poids de Serre local fortement générique, alors

$$W_{gen,w}(\rho) = W_w^2(\rho|_{G_{F_w}}).$$

Démonstration. Nous allons montrer que les hypothèses du théorème précédent sont satisfaites. Soit $F(x, y, z)$ un poids de Serre local fortement générique dans $W_w(\rho)$. Le théorème 7.1.1 impose alors que $F(x, y, z) \in W_w^2(\rho|_{G_{F_w}})$, et donc, d'après la proposition 4.4.5, il existe un poids restreint (a', b', c') et $w \in W_3$ tels que $(w, (a', b', c'))$ est bon, $\rho|_{I_p} \cong \tau(w, (a', b', c'))$ et $F(x, y, z) \in \mathcal{A}((a', b', c'))$. Rappelons que, si $F = F(a' - 2, b' - 1, c')_{reg}$, alors $\mathcal{A}((a', b', c'))$ est $\{F\}$ ou $\{F, R(F)\}$. Comme (x, y, z) est fortement générique, deux cas se présentent :

- (i) Supposons que $x - z < p - 8$. Dans ce cas, $F(x, y, z)$ est dans l'alcôve inférieure et ne peut donc pas être $R(F)$. Par conséquent, $F(x, y, z) = F$, d'où $x \equiv a' - 2 \pmod{p-1}$, $y \equiv b' - 1 \pmod{p-1}$ et $z \equiv c' \pmod{p-1}$, et on déduit immédiatement que $(x, y, z) \in (a' - 2, b' - 1, c') + (p - 1)\mathbb{Z}(1, 1, 1)$. Cela impose que $\rho|_{I_p} \cong \tau(w, (x + 2, y + 1, z))$. Si $w = (1\ 2\ 3)$, alors $\rho|_{I_p} \cong \tau((1\ 2\ 3), (a + 2, b + 1, c))$ avec $(a, b, c) = (x, y, z)$. Si $w = (1\ 3\ 2)$, alors $\rho|_{I_p}^{\vee} \otimes \omega_1^2 \cong \tau((1\ 2\ 3), (a + 2, b + 1, c))$ avec $(a, b, c) = (-z, -y, -x)$.
- (ii) Supposons que $x - z > p + 6$.
 - Supposons de plus que $F(x, y, z) = F$. Comme avant on a $(x, y, z) \in (a' + 2, b' + 1, c') + (p - 1)\mathbb{Z}(1, 1, 1)$, et cela impose que $\rho|_{I_p} \cong \tau(w, (x + 2, y + 1, z))$. Si $w = (1\ 2\ 3)$, alors $\rho|_{I_p}^{\vee} \otimes \omega_1^2 \cong \tau((1\ 3\ 2), (-z + 2, -y + 1, -x)) \cong \tau((1\ 2\ 3), (a + 2, b + 1, c))$ avec $(a, b, c) = (-x + p - 1, -y - 1, -z - p + 2)$. Si $w = (1\ 3\ 2)$, alors $\rho|_{I_p} \cong \tau((1\ 2\ 3), (a + 2, b + 1, c))$ avec $(a, b, c) = (z + p - 1, y - 1, x - p + 2)$.
 - Supposons que $F(x, y, z) = R(F)$. On vérifie aisément que $(x, y, z) \in (c' + p - 2, b' - 1, a' - p) + (p - 1)\mathbb{Z}(1, 1, 1)$. Donc dans ce cas, $\rho|_{I_p}$ est isomorphe à $\tau(w, (z + p, y + 1, x - p + 2))$. Si $w = (1\ 2\ 3)$, alors $\rho|_{I_p} \cong \tau((1\ 2\ 3), (a + 2, b + 1, c))$ avec $(a, b, c) = (z + p - 2, y, x - p + 2)$. Si $w = (1\ 3\ 2)$, alors $\rho|_{I_p}^{\vee} \otimes \omega_1^2 \cong \tau((1\ 2\ 3), (a + 2, b + 1, c))$ avec $(a, b, c) = (-x + p - 2, -y, -z - p + 2)$.

Dans tous les cas, nous avons trouvé un triplet d'entiers (a, b, c) tel que $a - b > 5$, $b - c > 4$, $a - c < p - 7$ et tel que l'un des deux isomorphismes $\rho|_{I_p} \cong \tau((1\ 2\ 3), (a + 2, b + 1, c))$ ou $\rho|_{I_p}^{\vee} \otimes \omega_1^2 \cong \tau((1\ 2\ 3), (a + 2, b + 1, c))$ est vrai. Le théorème 7.2.6 permet donc immédiatement de conclure. \square

8 Ensemble des poids de Serre globaux d'une représentation automorphe

Dans la section précédente, nous avons étudié le problème local qui consiste à comparer les ensembles $W_w(\rho)$ et $W_w^2(\rho|_{G_{F_w}})$. Le théorèmes 7.1.1 et 7.2.6 répondaient

à cette question. Nous voulons maintenant traiter le problème global consistant à comparer les ensembles $W(\rho)$ et $W^?(\rho)$.

8.1 Théorème principal : comparaison des ensembles de poids globaux

Plaçons-nous dans le contexte général décrit dans la section 4.1.

Théorème 8.1.1. (Comparaison de $W(\rho)$ et de $W^?(\rho)$)

Soit $\rho : G_F \rightarrow GL_3(\overline{\mathbb{F}}_p)$ une représentation continue telle que, pour toute place w de F divisant p , $\rho|_{G_{F_w}}$ est irréductible et modérément ramifiée. Alors :

(i) on a :

$$W_{gen}(\rho) \subseteq W^?(\rho).$$

(ii) si ρ est automorphe pour un certain poids de Serre global fortement générique, alors

$$W_{gen}(\rho) = W^?(\rho).$$

Démonstration.

(i) Considérons un poids de Serre global $F_a \in W_{gen}(\rho)$, a étant un poids restreint global. Fixons une place w de F divisant p et notons $v = w|_{G_{F_w}}$. Par définition, il existe un sous-groupe ouvert compact U de $G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty,p}) \times \prod_{v'|p} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_{v'}^+})$ non ramifié en p et une partie cofinie \mathcal{P} de \mathcal{P}_U ne contenant que des places où ρ est non ramifiée tels que, si \mathfrak{m} désigne l'idéal maximal de $\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ associé à la représentation ρ , on a $S(U, F_a)_{\mathfrak{m}} \neq 0$. Comme U est non ramifié en p , on peut écrire $U = \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_v^+}) \times U^v$, où U^v est un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty,p}) \times \prod_{v'|p, v' \neq v} \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_{v'}^+})$. Le lemme 6.2.1(ii) impose un isomorphisme :

$$S(F_{a_v}) \cong S(U, F_a),$$

et donc

$$S(F_{a_v})_{\mathfrak{m}} \cong S(U, F_a)_{\mathfrak{m}}.$$

Comme $S(U, F_a)_{\mathfrak{m}} \neq 0$, on déduit que $S(F_{a_v})_{\mathfrak{m}} \neq 0$ et donc $F_{a_v} \in W_w(\rho)$. Comme F_a est générique, l'application du théorème 7.1.1 entraîne que $F_{a_v} \in W_w^?(\rho|_{G_{F_w}})$. Cela étant vrai pour toute place w de F divisant p , on conclut que $F_a \in W^?(\rho)$.

(ii) On sait que $W_{gen}(\rho) \subseteq W^?(\rho)$ d'après (i). Soient F_a un poids de Serre global fortement générique dans $W(\rho)$ et $F_{a'}$ un poids de Serre global dans $W^?(\rho)$. Notons v_1, v_2, \dots, v_n les places de F^+ au-dessus de p . Par hypothèse, $F_a = \bigotimes_{i=1}^n F_{a_{v_i}} \in W_{gen}(\rho)$. Comme en (i), cela entraîne que $F_{a_{v_1}} \in W_{w_1}(\rho)$, où w_1 désigne une place de F au-dessus de v_1 . De plus, le poids $F_{a_{v_1}}$ étant fortement générique, le théorème 7.2.6 impose que $W_{gen, w_1}(\rho) = W_{w_1}^?(\rho|_{G_{F_{w_1}}})$, et donc que $F_{a_{v_1}} \in W_{gen, w_1}(\rho)$. Par

conséquent, en appliquant le lemme 6.2.1(ii) comme précédemment, on déduit que $F_{a'_{v_1}} \otimes \bigotimes_{i=2}^n F_{a_{v_i}} \in W_{gen}(\rho)$.

On recommence maintenant avec v_2 , et par le même procédé, on prouve que $F_{a'_{v_1}} \otimes F_{a'_{v_2}} \otimes \bigotimes_{i=3}^n F_{a_{v_i}} \in W_{gen}(\rho)$. Et continue ainsi avec v_3, v_4, \dots , pour obtenir à la fin que $F_{a'} \in W_{gen}(\rho)$. Par conséquent, $W_{gen}(\rho) = W^?(\rho)$.

□

8.2 Exemples

Considérons un cas très particulier. Fixons $p = 23$ et considérons les corps $F^+ = \mathbb{Q}$, $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ et $K = F(\zeta_7, \sqrt[3]{p})$. Comme $\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}]$ et $X^2 - X + 2 = (X - 10)(X + 9)$ sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, le premier p est totalement décomposé dans F . Notons w et w^c les deux places de F au-dessus de p . On sait alors que $F_w = \mathbb{Q}_p$ et $F_{w^c} = \mathbb{Q}_p$. Étudions l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{p}, \zeta_7)/\mathbb{Q}$.

- L'extension $\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne de degré 6 et de discriminant $\pm 7^5$. Elle est donc non ramifiée en p , l'indice de ramification en p est $e'_p = 1$, le degré d'inertie est $f'_p = 3$ puisque 3 est le plus petit entier naturel non nul f'_p tel que $p^{f'_p} \equiv 1 \pmod{7}$, et il y a $g'_p = 2$ idéaux premiers dans $\mathbb{Q}(\zeta_7)$ au-dessus de p .
- D'autre part, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{p})$ est le corps de rupture du polynôme d'Eisenstein $X^3 - p$ sur \mathbb{Q} . D'après la théorie de Kummer, on déduit que $(\sqrt[3]{p})$ est premier dans $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{p})$, d'indice de ramification $e''_p = 3$ et de degré d'inertie $f''_p = 1$.

Par conséquent, $\mathbb{Q}(\zeta_7, \sqrt[3]{p})/\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne de degré 42, d'indice de ramification $e_p = 3$, de degré d'inertie $f_p = 3$, et ayant $g_p = 2$ idéaux premiers au-dessus de p .

Revenons à l'extension K/F . On remarque que $\mathbb{Q}(\zeta_7, \sqrt[3]{p})/\mathbb{Q}$ est le corps de décomposition de $X^3 - p$, qui a pour discriminant $-7^3 \cdot p^6$, et donc $\mathbb{Q}(\zeta_7, \sqrt[3]{p})/\mathbb{Q}$ contient $\sqrt{-7}$. On en déduit que K/F est une extension galoisienne de degré 21. De plus, elle a pour indice de ramification 3 et pour degré d'inertie 3 pour les places w et w^c , et de plus w et w^c sont des puissances 7èmes d'idéaux premiers dans \mathcal{O}_K . Nous pouvons donc parler des groupes de décomposition D_w et D_{w^c} , que nous allons calculer maintenant.

Les deux groupes de décomposition précédents sont isomorphes au groupe de Galois $Gal(\mathbb{Q}_p(\zeta_7, \sqrt[3]{p})/\mathbb{Q}_p)$. C'est un groupe d'ordre 21 puisque $[\mathbb{Q}_p(\zeta_7) : \mathbb{Q}_p] = 3$ et $[\mathbb{Q}_p(\sqrt[3]{p}) : \mathbb{Q}_p] = 7$. L'extension $\mathbb{Q}_p(\zeta_7)/\mathbb{Q}_p$ étant non ramifiée de degré 3, son groupe de Galois est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Par conséquent, le groupe $Gal(\mathbb{Q}_p(\zeta_7, \sqrt[3]{p})/\mathbb{Q}_p(\zeta_7))$ est d'ordre 7 et donc isomorphe à $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. On en déduit une suite exacte :

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rightarrow Gal(\mathbb{Q}_p(\zeta_7, \sqrt[3]{p})/\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

De plus, 3 et 7 étant premiers et distincts, cette suite exacte est scindée et G est un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ pour un certain morphisme $\varphi : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow$

$\text{Aut}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Considérons $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_7, \sqrt[3]{p})/\mathbb{Q}_p)$ et $\tau \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_7, \sqrt[3]{p})/\mathbb{Q}_p(\zeta_7))$ tels que $\sigma^3 = \text{Id}$, $\tau^7 = \text{Id}$, $\sigma(\zeta_7) = \zeta_7^2$ et $\tau(\sqrt[3]{p}) = \zeta_7 \sqrt[3]{p}$. On vérifie alors immédiatement que $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^2$, et donc φ est le morphisme de groupes qui envoie $1 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sur $2 \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$. Nous avons ainsi calculé le groupe de Galois :

$$\text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_7, \sqrt[3]{p})/\mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

On en déduit que :

$$\text{Gal}(K/F) = D_w = D_{w^c} \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Intéressons-nous maintenant aux représentations de $\text{Gal}(K/F) \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Soit $V = \{f : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times\}$. C'est un $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel de dimension 3, muni d'une action de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ définie par :

$$((a, g) \cdot f)(x) = \overline{\zeta_7}^{-\varphi(x)(a)} f(x + g),$$

pour $a \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $g \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $f \in V$ et $x \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Si l'on considère f_0, f_1, f_2 la base naturelle de V , l'action de $(1, 0)$ est donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} \overline{\zeta_7} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\zeta_7}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\zeta_7}^4 \end{pmatrix}$$

et l'action de $(0, 1)$ par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est alors évident que V est une représentation irréductible de $\text{Gal}(K/F)$. Cela permet alors de définir une représentation irréductible $\rho : G_F \rightarrow \text{GL}(V)$.

Pour résumer, nous avons vu que :

- le corps F est un corps CM dans lequel le premier p est totalement décomposé.
- la représentation ρ est continue.
- pour toute place w de F au-dessus de p , la représentation $\rho|_{G_{F_w}}$ est irréductible et modérément ramifiée.

On définit finalement le groupe unitaire G sur F^+ associé au F -espace vectoriel F^3 et à la forme hermitienne $(z_1, z_2, z_3) \mapsto z_1\overline{c}(z_1) + z_2\overline{c}(z_2) + z_3\overline{c}(z_3)$, qui est bien compact à l'infini.

Nous remarquons alors que nous sommes en mesure d'appliquer le théorème 8.1.1. Calculons $W^?(\rho)$. Soit η dans le groupe d'inertie I_{F_w} . Alors $\eta|_{\text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_7, \sqrt[3]{p})/\mathbb{Q}_p)}$ fixe

le corps $\mathbb{Q}_p(\zeta_7)$. Il existe donc $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tel que $\eta|_{Gal(\mathbb{Q}_p(\zeta_7, \sqrt[7]{p})/\mathbb{Q}_p)} = \tau^n$.
On en déduit que :

$$\rho(\eta) = \begin{pmatrix} \overline{\zeta_7}^n & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\zeta_7}^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\zeta_7}^{4n} \end{pmatrix},$$

et donc que $\rho|_{I_{F_w}} \cong \tau((1\ 2\ 3), (13, 6, 3))$. D'après la proposition 4.4.6, on a :

$$\mathcal{C}(\rho) = \{(13, 6, 3), (7, 3, -10), (26, 12, 6), (26, 7, -11), (13, 4, -17), (29, 13, 2)\} \\ + 22(1, 1, 1)\mathbb{Z}.$$

On déduit alors grâce à 4.4.5 que :

$$W_w^?(\rho|_{G_{F_w}}) = \{F(11, 5, 3), F(5, 2, -10), F(24, 11, 6), F(24, 6, -11), F(11, 3, -17), \\ F(27, 12, 2), F(24, 5, -10), F(11, 2, -16), F(27, 11, 3)\}.$$

Par conséquent, en utilisant le théorème 8.1.1(i), on obtient que :

$$W_{gen}(\rho) \subseteq \{F(11, 5, 3), F(5, 2, -10), F(24, 11, 6), F(24, 6, -11), F(11, 3, -17), \\ F(27, 12, 2), F(24, 5, -10), F(11, 2, -16), F(27, 11, 3)\}.$$

Parmi les neuf poids précédents, aucun n'est générique, donc :

$$W_{gen}(\rho) = \emptyset.$$

Dans tout ce qui précède, nous pouvons remplacer 23 par d'autres nombres premiers impairs p . En fait, les seules propriétés de p que nous avons utilisées sont les suivantes :

- le premier p vérifie que $X^2 - X + 2$ admet deux racines distinctes modulo p , ce qui équivaut à ce que -7 est un carré modulo p , ou grâce à la loi de réciprocité quadratique, à ce que p est congru à 0, 1, 2 ou 4 modulo 7.
- le premier p n'est pas congru à 1 modulo 7 et vérifie que $p^3 \equiv 1 \pmod{7}$, ce qui revient à dire que p est congru à 2 ou 4 modulo 7.

Nous pouvons donc utiliser exactement les mêmes arguments que précédemment dès que p est congru à 2 ou 4 modulo 7. Par exemple, prenons $p = 79$. Dans ce cas, $\rho|_{I_{F_w}} \cong \tau((1\ 2\ 3), (45, 22, 11))$, et donc :

$$\mathcal{C}(\rho) = \{(45, 22, 11), (23, 11, -34), (90, 44, 22), (90, 23, -35), (45, 12, -57), (101, 45, 10)\} \\ + 78(1, 1, 1)\mathbb{Z}.$$

Par conséquent, avec 8.1.1(i)

$$W_{gen}(\rho) \subseteq \{F(43, 21, 11), F(21, 10, -34), F(88, 43, 22), F(88, 22, -35), F(43, 11, -57), \\ F(99, 44, 10), F(88, 21, -34), F(43, 10, -56), F(99, 43, 11)\}.$$

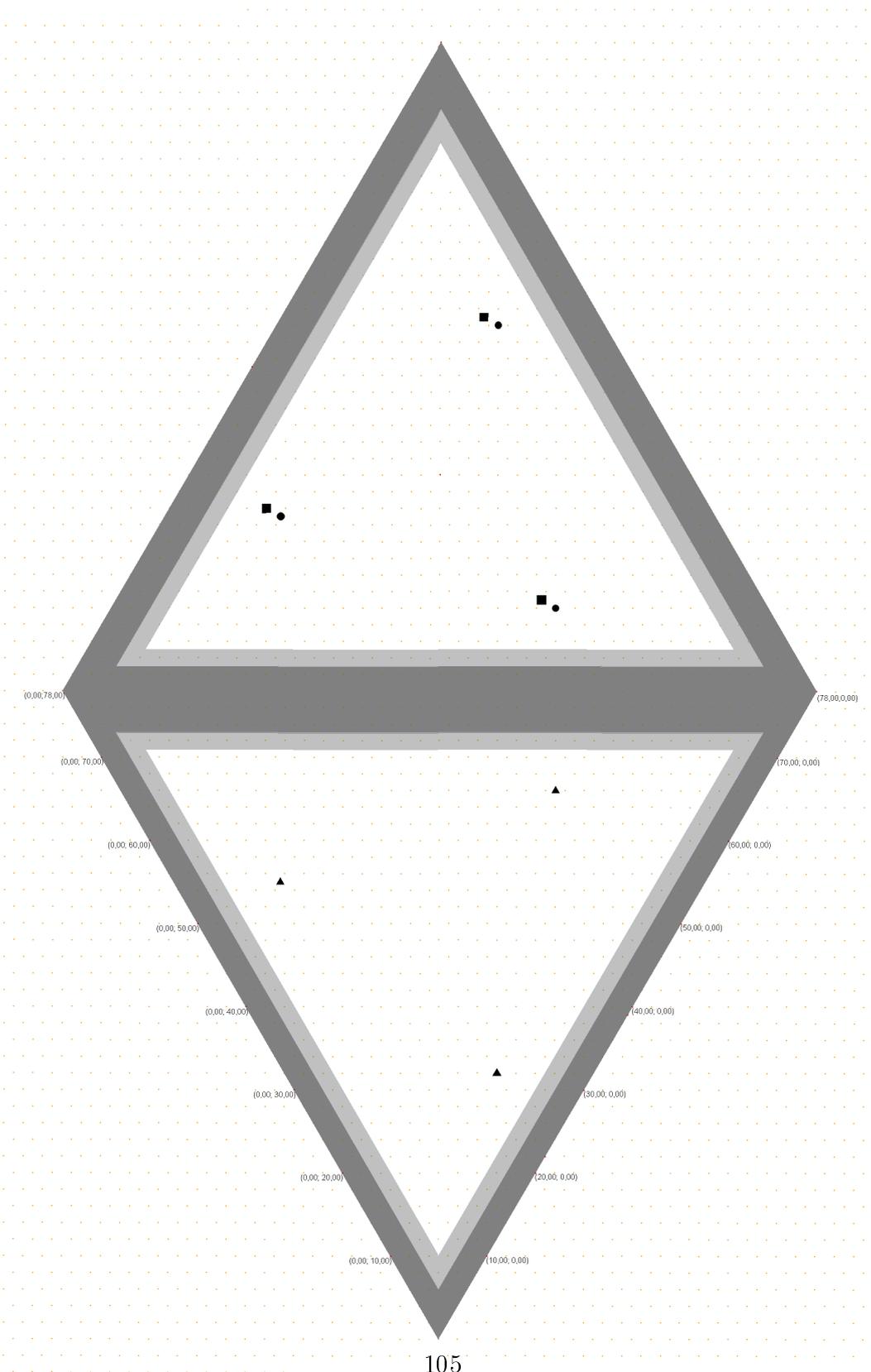
On remarque cette fois-ci que les 9 poids précédents sont fortement génériques. On déduit alors de 8.1.1(ii) que :

$$W_{gen}(\rho) = \emptyset$$

ou

$$W_{gen}(\rho) = \{F(43, 21, 11), F(21, 10, -34), F(88, 43, 22), F(88, 22, -35), F(43, 11, -57), \\ F(99, 44, 10), F(88, 21, -34), F(43, 10, -56), F(99, 43, 11)\}.$$

Voici la représentation graphique de cet ensemble de poids :



On localise sur ce graphe les poids restreints $F(a, b, c)$, l'axe de droite correspondant à la différence $a - b$ et l'axe de gauche à la différence $b - c$. La région blanche correspond aux poids très génériques, la région gris clair aux poids génériques mais pas très génériques, et la région gris foncé aux poids non génériques. Les trois poids dans l'alcôve inférieure sont indiqués par des triangles. Les trois cercles sont les trois poids de l'alcôve supérieure que l'on obtient à partir des poids de l'alcôve inférieure par symétrie. Les trois carrés sont les trois autres poids de l'alcôve supérieure. Ce graphique montre le comportement typique des neuf poids lorsque le théorème 8.1.1 s'applique. N'oublions pas que ρ pourrait aussi être automorphe pour des poids non représentés sur le graphe dans la région gris foncé.

Références

- [BC] Olivier Brinon and Brian Conrad. CMI summer school notes on p -adic hodge theory. <http://math.stanford.edu/conrad/papers/notes.pdf>. Notes de cours en ligne.
- [BM02] Christophe Breuil and William Messing. Torsion étale and crystalline cohomologies. *Astérisque*, (279) :81–124, 2002. Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques, II.
- [Bre] Christophe Breuil. p -adic Hodge theory, deformations and local Langlands. <http://www.math.u-psud.fr/~breuil/PUBLICATIONS/Barcelone.pdf>. Notes de cours en ligne.
- [Bre02] Christophe Breuil. Integral p -adic Hodge theory. In *Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka)*, volume 36 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 51–80. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.
- [Bum97] Daniel Bump. *Automorphic forms and representations*, volume 55 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [Car11] Xavier Caruso. F_p -représentations semi-stables. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 61(4) :1683–1747, 2011.
- [CHT08] Laurent Clozel, Michael Harris, and Richard Taylor. Automorphy for some l -adic lifts of automorphic mod l Galois representations. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (108) :1–181, 2008. With Appendix A, summarizing unpublished work of Russ Mann, and Appendix B by Marie-France Vignéras.
- [Del69] Pierre Deligne. Formes modulaires et représentations l -adiques. *Séminaire N. Bourbaki*, (355) :139–172, 1968-1969.
- [DI95] Fred Diamond and John Im. Modular forms and modular curves. In *Seminar on Fermat's Last Theorem (Toronto, ON, 1993–1994)*, volume 17 of *CMS Conf. Proc.*, pages 39–133. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [DS74] Pierre Deligne and Jean-Pierre Serre. Formes modulaires de poids 1. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 7 :507–530 (1975), 1974.
- [EGH] Matthew Emerton, Toby Gee, and Florian Herzig. Weight cycling and Serre-type conjectures for unitary groups.
- [EGH⁺11] Pavel Etingof, Oleg Golberg, Sebastian Hensel, Tiankai Liu, Alex Schwendner, Dmitry Vaintrob, and Elena Yudovina. *Introduction to representation theory*, volume 59 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. With historical interludes by Slava Gerovitch.

- [FL82] Jean-Marc Fontaine and Guy Laffaille. Construction de représentations p -adiques. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(4) :547–608 (1983), 1982.
- [FO] Jean-Marc Fontaine and Yi Ouyang. *Theory of p -adic Galois representations*. Springer Verlag.
- [Gel84] Stephen Gelbart. An elementary introduction to the Langlands program. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 10(2) :177–219, 1984.
- [GS11] Toby Gee and David Savitt. Serre weights for quaternion algebras. *Compos. Math.*, 147(4) :1059–1086, 2011.
- [Hen93] Guy Henniart. Caractérisation de la correspondance de Langlands locale par les facteurs ϵ de paires. *Invent. Math.*, 113(2) :339–350, 1993.
- [Her09] Florian Herzig. The weight in a Serre-type conjecture for tame n -dimensional Galois representations. *Duke Math. J.*, 149(1) :37–116, 2009.
- [Her11a] Florian Herzig. The classification of irreducible admissible mod p representations of a p -adic GL_n . *Invent. Math.*, 186(2) :373–434, 2011.
- [Her11b] Florian Herzig. A Satake isomorphism in characteristic p . *Compos. Math.*, 147(1) :263–283, 2011.
- [HT01] Michael Harris and Richard Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. With an appendix by Vladimir G. Berkovich.
- [Jan87] Jens Carsten Jantzen. *Representations of algebraic groups*, volume 131 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1987.
- [Joc82] Naomi Jochnowitz. A study of the local components of the Hecke algebra mod l . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 270(1) :253–267, 1982.
- [Mil06] J. S. Milne. *Elliptic curves*. BookSurge Publishers, Charleston, SC, 2006.
- [Neu99] Jürgen Neukirch. *Algebraic number theory*, volume 322 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder.
- [RS01] Kenneth A. Ribet and William A. Stein. Lectures on Serre’s conjectures. In *Arithmetic algebraic geometry (Park City, UT, 1999)*, volume 9 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 143–232. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

- [Ser68] Jean-Pierre Serre. *Corps locaux*. Hermann, Paris, 1968. Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.
- [Ser72] Jean-Pierre Serre. Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques. *Invent. Math.*, 15(4) :259–331, 1972.
- [Ser77] Jean-Pierre Serre. *Cours d'arithmétique*. Presses Universitaires de France, Paris, 1977. Deuxième édition revue et corrigée, Le Mathématicien, No. 2.
- [Ser87] Jean-Pierre Serre. Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. *Duke Math. J.*, 54(1) :179–230, 1987.
- [Sil09] Joseph H. Silverman. *The arithmetic of elliptic curves*, volume 106 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Dordrecht, second edition, 2009.
- [Ste51] Robert Steinberg. The representations of $\text{GL}(3, q)$, $\text{GL}(4, q)$, $\text{PGL}(3, q)$, and $\text{PGL}(4, q)$. *Canadian J. Math.*, 3 :225–235, 1951.